Positive Formen der Gestalt
$ax^2 + by^2 + cz^2 + dt^2$
mit zwei und drei Ausnahmewerten

Inaugural—Dissertation

zur Erlangung des Grades eines Doktors
der Naturwissenschaften
der
Mathematisch-naturwissenschaftlichen Fakultät
der
Eberhard-Karls-Universität
zu Tübingen

vorgelegt von
Adolf Wolf
aus Reutlingen

1962

1963

7607

Positive Formen der Gestalt
$ax^2 + by^2 + cz^2 + dt^2$
mit zwei und drei Ausnahmewerten

Inaugural—Dissertation

zur Erlangung des Grades eines Doktors
der Naturwissenschaften
der
Mathematisch-naturwissenschaftlichen Fakultät
der
Eberhard-Karls-Universität
zu Tübingen

vorgelegt von
Adolf Wolf
aus Reutlingen

1963

R. UNIV.
BIBLIOTHEEK
LEIDEN

Tag der mündlichen Prüfung: 20. Juli 1962
Dekan: Professor Dr. K. G. Grell
1. Berichterstatter: Professor Dr. M. Müller
2. Berichterstatter: Professor Dr. K. Zeller

Herrn Prof. Dr. Max Müller danke ich für die Erteilung des Themas; ihm und Herrn Dr. H. Ehlich danke ich ferner herzlich für zahlreiche Anregungen sowie für die freundliche Anteilnahme am Fortschritt meiner Arbeit. Für die Erlaubnis zur Benutzung des Siemens - Digitalrechners bei der numerischen Untersuchung von fünf Formen sowie für Vorschläge zur Programmgestaltung bin ich Herrn Prof. Dr. K. Zeller zu grossem Dank verpflichtet, ebenso wie Herrn Stud. Ass. W. Niethammer für die Ausarbeitung der Programme.

Inhaltsverzeichnis.

I. GESCHICHTLICHE BEMERKUNGEN ZU UNIVERSELLEN UND FASTUNIVERSELLEN FORMEN.

§ 1. Die Form $F = x^2+y^2+z^2+t^2$ 1

§ 2. Universelle und fastuniverselle Formen 3

II. HILFSSÄTZE ÜBER TERNÄRE FORMEN.

§ 3. Definitionen. Sätze über ternäre Formen 9

§ 4. Die regulären Formen (1,1,4),(1,1,8),(1,1,9),(1,3,4) (2,2,3),(1,2,8),(1,5,5) 14

§ 5. Die regulären Formen (1,2,6),(1,3,6),(1,4,6),(2,3,3) (1,5,10),(1,5,8),(1,1,12),(1,2,3),(2,3,9) 19

§ 6. Die Formen (1,2,9),(1,2,12),(1,5,6),(1,3,9),(1,4,4), (2,4,8) 23

§ 7. Teilaussagen über die Formen (1,1,7),(1,3,5),(1,3,7) (1,2,14),(1,1,14) 26

§ 8. Teilaussagen über die Formen (1,7,18),(2,9,14), (3,4,7),(1,5,7),(1,1,10),(1,2,20),(1,6,10),(2,12,20) (2,3,4) 30

§ 9. Weitere Teilaussagen 33

III. FASTUNIVERSELLE FORMEN MIT GENAU ZWEI AUSNAHMEWERTEN.

§ 10. Notwendige Bedingungen für $F = ax^2+by^2+cz^2+dt^2$ ... 38

§ 11. Die Formen 10.6-1,...,10.6-6 44

§ 12. Die Formen 10.6-7,...,10.6-11 49

§ 13. Hilfssätze 51

§ 14. Die Formen 10.6-12 und 10.6-13 53

§ 15. Die Formen 10.6-14 und 10.6-15 57

§ 16. Die Formen 10.6-16,...,10.6-20 63

§ 17. Die Formen 10.6-21,...,10.6-23 67

§ 18. Die Formen 10.6-24 69

§ 19. Die Form (1,3,5,7) 72

§ 20. Zusammenstellung 75

IV. FASTUNIVERSELLE FORMEN MIT GENAU DREI AUSNAHMEWERTEN.

§ 21. Notwendige Bedingungen für $F = ax^2+by^2+cz^2+dt^2$ ... 77

§ 22. Die Formen 21.4-1,...,21.4-4 87

§ 23. Die Formen 21.4-5,...,21.4-7 90
§ 24. Die Formen 21.4-8,...,21.4-10 93
§ 25. Die Formen 21.4-11,...,21.4-15 94
§ 26. Die Formen 21.4-16 und 21.4-17 96
§ 27. Die Formen 21.4-18 und 21.4-19 98
§ 28. Die Formen (1,2,11,d) (d = 12,15,17,20) 101
§ 29. Die Formen (1,2,12,d) (d = 13,15,17,24) 104
§ 30. Die Formen (1,2,13,17) und (1,2,13,20) 107
§ 31. Die Formen 21.4-23,...,21.4-26 111
§ 32. Die Formen 21.4-27,...,21.4-30 115
§ 33. Die Formen 21.4-31,...,21.4-34 119
§ 34. Die Formen (2,4,5,d) (d = 6,7,8) 123
§ 35. Die Formen F_1 = (1,1,11,14) und F_2 = (1,3,5,11) .. 125
§ 36. Die Formen F_3 = (1,2,12,20) und F_4 = (1,2,12,22) . 127
§ 37. Zusammenfassung 131

V. OBERE UND UNTERE SCHRANKEN FUR DIE DETERMINANTE VON FORMEN MIT GENAU VIER AUSNAHMEWERTEN.

§ 38. Notwendige Bedingungen für d in $F = ax^2+by^2+cz^2+dt^2$ zur Gewinnung der oberen Schranke 133
§ 39. Ermittlung der oberen und unteren Schranke für die Determinanten von F 134
§ 40. Zusammenstellung 136
Verzeichnis der Anmerkungen 138
Literaturverzeichnis 139

I. GESCHICHTLICHE BEMERKUNGEN ZU UNIVERSELLEN UND FASTUNIVERSELLEN FORMEN.

§ 1. Die Form $F = x^2+y^2+z^2+t^2$.

Neben seinen Untersuchungen über die Darstellbarkeit von Zahlen als Summe von zwei oder drei Quadraten beschäftigt sich Diophant auch mit der Frage, welche Zahlen sich in vier Quadrate zerlegen lassen : In seiner " Arithmetik " (7I)[1] findet sich in Buch IV (7Ia) die Aufgabe, zu vorgegebenem n rationale Zahlen x,y,z,t so zu finden, dass $n = x^2+y^2+z^2+t^2+x+y+z+t$, d.h. $4(n+1) = (2x+1)^2+(2y+1)^2+(2z+1)^2+(2t+1)^2$ gilt, und in Buch V (7Ib) stellt er die Aufgabe, eine Zahl n derart als Summe von vier Zahlen x,y,z,t darzustellen,dass gleichzeitig

$$x+y+z = X^2,\ y+z+t = Y^2,\ z+t+x = Z^2,\ t+x+y = T^2$$

gilt, d.h. $3n = X^2+Y^2+Z^2+T^2$ ist. Während Diophant bei den Zerlegungen in zwei oder drei Quadrate, d.h. bei der Darstellung als Summe von zwei oder drei Quadraten, stets anführt, unter welchen Bedingungen dies möglich ist, fehlen solche Angaben bei der Darstellung einer Zahl als Summe von vier Quadraten. Bachet (7II) vermutet in einer Erläuterung zu seiner Diophant-Ausgabe von 1621, dass für ganzes positives n stets eine Zerlegung $n = x^2+y^2+z^2+t^2$ sogar durch ganze Zahlen x,y,z,t gefunden werden kann; er gibt an, dies für alle $1 \leq n \leq 325$ bestätigt zu haben und veröffentlicht eine Tabelle für $n \leq 120$.

Fermat (14) gibt in einer Randnote seiner Diophant-Ausgabe von Bachet an, dass er den schönen und ganz allgemeinen Satz entdeckt habe, dass sich jede natürliche Zahl n als Summe von höchstens m m-Eckszahlen, d.h. in der Form

1.1 $$n = \sum_{\mu=1}^{m} \frac{1}{2}\{(m-2)x_\mu^2 - (m-4)\}x_\mu$$

darstellen lasse. Dies besagt aber, es gibt ganze, nicht negative Zahlen $x_1,x_2,\ldots,x_m$, so dass

---

[1] Anmerkungen vgl. Seite 138.

1.2 $$\sum_{\mu=1}^{m}\{2(m-2)x_\mu - (m-4)\}^2 = 8n(m-2) + m(m-4)^2$$

gilt. Fermat schreibt, den Beweis für seine Behauptung könne er nicht beifügen; er wolle aber dem Gegenstand ein besonderes Werk widmen. Dieses ist nie erschienen, und Fermats Beweis ist auch sonst nicht bekannt geworden.

Euler versucht lange Zeit ohne Erfolg die Vermutung Bachets, d.h. den Spezialfall m = 4 der Behauptung Fermats zu beweisen. 1748 findet er die Identität (12a)

1.3 $$(a^2+b^2+c^2+d^2)(p^2+q^2+r^2+s^2) = (ap+bq+cr+ds)^2+(aq-bp\pm cs\mp dr)^2+$$
$$+(ar\mp bs-cp\pm dq)^2+(as\pm br\mp cq-dp)^2.$$

Hiernach genügt es zu beweisen, dass jede Primzahl in vier Quadrate zerlegbar ist. 1751 beweist Euler (12b) den Satz, dass jede Zahl als Summe von vier Quadraten rationaler Zahlen darstellbar ist; in einigen Spezialfällen gelingt ihm auch eine Zerlegung in vier Quadrate ganzer Zahlen.

1770 beweist Lagrange (28), dass jede Primzahl als Summe von vier Quadraten ganzer Zahlen dargestellt werden kann. Mit Hilfe von 1.3 ist damit der ganze Satz bewiesen. Etwas später findet auch Euler (13) einen Beweis; dieser ist einfacher als der von Lagrange gegebene.

1801 beweist Gauss (16b) den Satz über die Zerlegbarkeit einer Zahl in vier Quadrate nach einer Methode, die für die folgenden Untersuchungen vorbildlich ist: Er führt die Frage nach einer Darstellung von n durch eine quaternäre Form $n = x^2+y^2+z^2+t^2$ zurück auf die Aufgabe, für geeignet wählbares t die Differenz $n-t^2$ durch die ternäre Form $f = x^2+y^2+z^2$ darzustellen und benutzt dann seine Untersuchungen über die Anzahl $r_3(j)$ der Darstellungen von j durch f (16a). Ohne Verwendung von $r_3(j)$ beweist 1850 Dirichlet (8b), dass f genau die Zahlen j darstellt, die nicht die Gestalt $4^k(8q+7)$ haben. Für m = 3 beweist Gauss (16b) auch die Behauptung Fermats; allgemein wird der von Fermat vermutete Satz 1.1 von Cauchy (3)

1813 bewiesen.

Jacobi (19), Liouville (30) und Dirichlet (9) untersuchen die Anzahl $r_4(n)$ der Darstellungen von n durch die Form $x^2+y^2+z^2+t^2$. Weitere Ergebnisse über $r_4(n)$ werden erzielt durch L.Gegenbauer (17) und L.J.Mordell (31), zum Teil unter Verwendung von Theta- Reihen.

Die Frage nach der Darstellbarkeit von Zahlen in der Form $x^2+y^2+z^2+t^2$ ist nach mehreren Richtungen verallgemeinert worden:

a) Ist eine Darstellung $n = \sum_{\varrho=1}^{s} x_\varrho^k$ für jede positive ganze Zahl n in ganzen Zahlen x_ϱ stets möglich, wobei die Anzahl s der Summanden nur von k abhängt ? Diese Frage führt zum Waringschen Problem und dessen Verallgemeinerungen durch E.Kamke (25).

b) Wie müssen die Werte a_ν beschaffen sein, damit eine Darstellung $n = \sum_{\nu=1}^{5} a_\nu x_\nu^2$ durch ganzzahlige x_ν für alle n möglich wird ? Diese Frage führt zu den universellen und, in einer Erweiterung, zu den fastuniversellen Formen.

c) Wie müssen die Zahlen a_ϱ beschaffen sein, damit $n = \sum_{\varrho=1}^{r} a_\varrho x_\varrho^2$ für jedes n in ganzen Zahlen x_ϱ mit $r < 4$ lösbar ist ? Es ergibt sich, dass eine solche Darstellung nur für $r = 3$ und nur durch indefinite Formen möglich ist (Ross (38)).

§ 2. Universelle und fastuniverselle Formen.

Definitionen. Die quaternäre Form $F = ax^2+by^2+cz^2+dt^2$ wird kurz (a,b,c,d) geschrieben; o.B.d.A. kann $0 < a \leq b \leq c \leq d$ angenommen werden. Eine Zahl n wird durch F dargestellt, wenn es ganze Zahlen x,y,z,t gibt, für die $n = ax^2+by^2+cz^2+dt^2$ gilt. Mit der von Dickson (4) 1927 eingeführten Bezeichnung heisst die Form F universell, wenn sie alle natürlichen Zahlen darstellt; fastuniversell, wenn sie alle natürlichen Zahlen ausser endlich vielen, also alle natürlichen Zahlen oberhalb einer positiven

Schranke darstellt.

a) Universelle Formen F = (a,b,c,d).

1840 beweist G.Jacobi (19), dass die Form (1,2,3,6) universell ist; 1845 zeigt J.Liouville (30), dass dies mit der Aussage, die Form (1,1,1,1) ist universell, gleichwertig ist. Liouville beweist ferner : Die Formen (1,a,b,ab) sind universell nur in folgenden sieben Fällen : $\{a = 1,\ b = 1,2,3\}$ und $\{a = 2,\ b = 2,3,4,5\}$; für andere Werte von a,b lassen sich stets Zahlen finden, die von (1,a,b,ab) ausgelassen werden. 1881 zeigt H.J.Smith (43b), dass die Formen (1,1,3,3) und (1,2,3,6) universell sind. Pepin (36) untersucht 1890 die Anzahl der Darstellungen von n durch die Form (1,1,3,3) und gibt an, dass auf Grund seiner Ergebnisse viele der Resultate von Liouville gewonnen werden können. Für den Beweis seiner Sätze zieht er zum Teil elliptische Funktionen heran.

1916 zeigt Ramanujan (37), dass es höchstens 55 universelle Formen gibt. Dass diese 55 Formen auch alle universell sind, beweist er nicht ausführlich, aber er gibt die zum Beweis benötigten Hilfssätze über ternäre Formen an, allerdings ebenfalls ohne Beweis. Diese Hilfssätze werden 1927 von L.E.Dickson (4) hergeleitet. In derselben Arbeit stellt Dickson auch fest, dass alle von Ramanujan angegebenen Formen mit Ausnahme der Form (1,2,5,5), die die Zahl 15 auslässt, universell sind. Es gibt demnach genau 54 universelle Formen.

Es ist historisch interessant, dass die entsprechende Frage nach " universellen " Linearformen von Dreieckszahlen schon vorher beantwortet wurde; nach P.Bachmann (1), Seite 150, Fussnote gibt es genau 7 "universelle" Formen $\sum_{\nu=1}^{3} a_\nu \frac{1}{2}(x_\nu+1)x_\nu$.

b) Allgemeine universelle Formen.

Die Fragestellung Ramanujans nach universellen Formen wird von Dickson (5) erweitert, indem er allgemein positiv definite quaternäre quad-

ratische Formen

2.1 $F = ax^2+by^2+cz^2+dt^2+exy + gxz + hxt + iyz + jyt + kzt$

mit ganzzahligen Koeffizienten untersucht. Dickson beweist: Ist F universell, so ist F äquivalent zu einer Form $F_1 = x^2+f$. Dabei ist f eine ternäre Form der Gestalt $\alpha u^2+\beta v^2+\gamma w^2+\delta uv+\xi uw+\lambda vw$ mit dem Minimum 1 bzw. 2, d.h. für jedes Tripel ganzer Zahlen u,v,w $\neq$ 0,0,0 ist der Wert von f grösser oder gleich 1 bzw. 2 und für mindestens ein Tripel ist er genau 1 bzw. 2. Dickson gibt ferner an, dass es genau 353 ternäre Formen f mit dem Minimum 1 gibt, so dass x^2+f universell wird. Versehentlich hat er aber einige Formen doppelt gezählt, eine Einschränkung für den Laufbereich der Koeffizienten in der ternären Form f nicht beachtet und übersehen, dass die Form $x^2+u^2+3v^2+22w^2+uv$ die Zahl 110 auslässt. Daher sind in diesem Fall nur 328 verschiedene Formen der Gestalt 2.1 universell. Der noch zu untersuchende Fall, dass f eine ternäre Form mit dem Minimum 2 ist, wird 1928 von D.C.Morrow (32a) behandelt, aber nicht vollständig gelöst. Über seine Untersuchungen erschien leider 1948 nur ein kurzer Ergebnisbericht (32b).

1946 gibt A.E.Ross (41) eine obere Schranke für die Determinante D jeder klassischen universellen Form an. Dabei versteht man unter klassischer Form eine Form der Gestalt 2.1, bei der die Werte e,g,h,i,j,k gerade Zahlen sind. Ross zeigt, dass $D \leq 112$ gilt. Hierauf bestimmt 1947 M.F.Willerding (46a) alle klassischen universellen Formen, indem sie jede reduzierte klassische Form, deren Determinante $D \leq 112$ ist, untersucht. Es ergeben sich genau 178 klassische universelle Formen. Auch von dieser Arbeit erschien 1948 nur ein kurzer Bericht (46b).

c) Fastuniverselle Formen F = (a,b,c,d).

Liouville (30) zeigt, dass (1,1,5,5) fastuniversell ist; die einzige von der Form nicht angenommene Zahl ist 3. Ferner beweist er, dass jede ungerade Zahl und jede Zahl 4k durch (1,3,4,12) dargestellt wird. Bei einigen Formen F stellt er auch die Anzahl der Lösungsquadrupel x,y,z,t

der Gleichung $ax^2+by^2+cz^2+dt^2 = n$ für spezielle Werte von n fest. Auf analytischem Weg bestimmen 1892 R.Fricke und F.Klein (15) die Anzahl r Darstellungen von 4m durch die Form (1,1,7,7). Ramanujan (37) bestimmt sämtliche fastuniversellen Formen der Gestalt (1,1,1,m).

Eine allgemeine Untersuchung der fastuniversellen Formen F = (a,b,c,d) knüpft an die Lösungszahl $r_4(n)$ der Gleichung $n = ax^2+by^2+cz^2+dt^2$ an. Liouville (30) hatte $r_4(n)$ schon berechnet bei F = (1,1,c,c) für die Werte c = 2,3,4,8,16 und für c = 5 bei ungeradem n. Durch Verwendung von Modulfunktionen erhält H.D.Kloosterman (27) 1926 die Zahl der Darstellungen von n durch die Form F = (1,1,c,c) für c = 3,5,6,7; er gibt an, seine Methode liefere auch noch Ergebnisse für c = 1,2,4,8,16.

In seiner Dissertation, Groningen 1924, beweist er mit Hilfe der Methoden von Hardy und Littlewood aus " Partitio Numerorum " eine asymptotische Formel für $r_s(n)$, wobei $r_s(n)$ die Zahl der Lösungen von $n = \sum_{\alpha=1}^{s} a_\alpha x_\alpha^2$ bezeichnet. Es ergibt sich für $s \geq 5$ und jedes $\varepsilon > 0$

$$r_s(n) = \frac{1}{\Gamma(s/2)} \frac{\pi^{s/2} S(n)}{\sqrt{a_1 \cdots a_s}} n^{s/2-1} + O(n^{s/4+\varepsilon}) + O(n^{s/2-1-1/4+\varepsilon})$$

Hierin bezeichnet S(n) die "singular series". Für s = 4 versagt diese Formel. Durch feinere Abschätzungen einiger mehrfacher Summen kann Kloosterman (26) 1926 zeigen, dass

$$r_4(n) = \frac{\pi^2}{\sqrt{abcd}} n S(n) + O(n^{19/18+\varepsilon})$$

ist.

Mit Hilfe dieser Formel gelingt es ihm, sowohl hinreichende als auch notwendige Bedingungen für die Koeffizienten a,b,c,d zu finden, damit F = (a,b,c,d) fastuniversell wird. 1782 hat Waring (45) vermutet, dass eine Form (a,b,c,d) fastuniversell ist, falls der grösste gemeinsame Teiler der vier Zahlen a,b,c,d gleich eins ist. Nach den Ergebnissen von Kloosterman trifft diese Vermutung nicht zu: (1,5,9,13) stellt die Zahle 2.4^k (k = 0,1,2,...) nicht dar.

Es zeigt sich, dass es nur endlich viele Formen gibt, die der hinrei-

chenden Bedingung nicht genügen und doch fastuniversell sind. Kloosterman löst das Problem, alle fastuniversellen Formen anzugeben, mit vier Ausnahmen: bei den Formen (1,2,11,38),(1,2,17,34),(1,2,19,22),(1,2,19,38) kann er nicht entscheiden, ob sie fastuniversell sind oder nicht.

1946 gibt G.Pall (34) eine neue Formulierung der Ergebnisse Kloostermans: Ist

A) die Kongruenz $F \equiv n \ (p^r)$ für alle n,p,r lösbar, und hat

B) die Kongruenz $F \equiv 0 \ (p^r)$ für alle p,r Lösungen $x,y,z,t \not\equiv 0,0,0,0 \ (p)$,

so ist F fastuniversell. Dabei ist A) eine notwendige, B) eine hinreichende Bedingung. Es gibt genau 199 Formen F = (a,b,c,d), welche die Bedingung B) nicht erfüllen und doch fastuniversell sind. Es zeigt sich, dass die vier bei Kloosterman unentscheidbar gebliebenen Formen (1,2,11,38),(1,2,17,34), (1,2,19,22),(1,2,19,38) fastuniversell sind.

d) Allgemeinere fastuniverselle Formen:

Die Bedingungen von Kloosterman werden 1946 von A.E.Ross (41) auf klassische quaternäre Formen F der Gestalt 2.1 übertragen. Ross leitet dazu Beziehungen zwischen F und einer Diagonalform G = (r,s,u,v) her; ist die Determinante von F ungerade, so können auf G die Bedingungen von Kloosterman angewandt werden. Auf diese Weise kann man sämtliche klassischen fastuniversellen Formen F mit ungerader Determinante bestimmen.

1946 erweitern A.E.Ross und G.Pall (35) die Kriterien für fastuniverselle Formen auf beliebige m-äre Formen ($m > 4$), indem sie die asymptotische Formel von Kloosterman auf diese Formen ausdehnen.

e) Fastuniverselle Formen (a,b,c,d) mit genau einem Ausnahmewert.

1938 bestimmt P.R.Halmos (18) alle Formen (a,b,c,d), die alle Zahlen ausser einer darstellen; er erhält 87 solcher Formen. Nur von der Form (1,2,7,13) kann er nicht zeigen, dass sie ausser der Zahl 5 keinen weiteren Wert auslässt. Dabei übersah Halmos aber, dass die Formen

dass (1,2,7,13) nur den Wert 5 auslässt. Es gibt also 86 Formen mit genau einem Ausnahmewert.

In der vorliegenden Arbeit werden quaternäre Formen (a,b,c,d) ($a > 0$) mit genau zwei bzw. drei Ausnahmewerten untersucht. Es ergeben sich 126 Formen mit genau zwei Ausnahmewerten; von der Form (1,3,5,7) kann ich nicht zeigen, dass sie nur die Zahlen 2 und 22 auslässt. Bei den Formen mit genau drei Ausnahmewerten erhält man 93 Formen. Offen bleibt die Frage, ob die Formen (1,1,11,14),(1,3,5,11),(1,2,12,20) und (1,2,12,22) genau drei Ausnahmewerte haben oder nicht.

II. HILFSSÄTZE ÜBER TERNÄRE FORMEN.

§ 3. Definitionen. Sätze über ternäre Formen.

3.1 Bei der Untersuchung der quaternären Formen mit zwei oder drei Ausnahmewerten sind Ergebnisse aus der Theorie der ternären Formen erforderlich. Der Übersichtlichkeit halber sollen die benötigten Hilfsmittel in diesem Abschnitt zusammengestellt werden.
Zunächst werden einige Abkürzungen eingeführt:
Mit f (oder g,h) wird stets eine klassische positive quadratische ternäre Form bezeichnet.:

$$f = f(x,y,z) = ax^2 + by^2 + cz^2 + 2qyz + 2rxz + 2sxy.$$

Ist $q = r = s = 0$, so schreibt man kurz $f = (a,b,c)$.

3.2 Für positive Formen f gilt (vgl. etwa Landau (29), Satz 182)

$$D = \begin{vmatrix} a & s & r \\ s & b & q \\ r & q & c \end{vmatrix} > 0, \quad \begin{vmatrix} a & s \\ s & b \end{vmatrix} > 0, \quad a > 0 .$$

D nennt man die Determinante der Form f.

3.3 Zwei Formen $f = \sum_{i,k=1}^{3} a_{ik}x_ix_k$ und $g = \sum_{j,m=1}^{3} b_{jm}y_jy_m$ $(a_{ik}, b_{jm}$ ganz) heissen äquivalent zueinander, wenn es eine ganzzahlige Transformation $x_i = \sum_{r=1}^{3} c_{ri}y_r$ $(i = 1,2,3)$ der Determinante $(c_{ri}) = 1$ gibt, die f in g überführt. Da somit äquivalente Formen dieselben Zahlen darstellen, so fasst man sie zu einer Klasse zusammen. Jede solche Klasse äquivalenter Formen kann durch eine Form, die reduzierte Form, repräsentiert werden.

3.4 Dabei heisst eine Form f reduziert, wenn gilt:

a) $a \leq b \leq c$, $2q \leq b$, $2r \leq a$, $2s \leq a$ für positive Werte q,r,s

b) $a \leq b = c$, $-2q \leq b$, $-2r = a$, $-2s \leq a$, $-2(q+r+s) \leq a+b$ für nicht positive Werte q,r,s.

Gilt an einer Stelle der obigen Ungleichungen das Gleichheitszeichen, so muss auserdem gelten:

a) bei positiven Werten q,r,s: Für $a = b$ gilt $q \leq r$
für $b = c$ gilt $r \leq s$.
Für $2q = b$ gilt $s \leq 2r$
für $2r = a$ gilt $s \leq 2q$ und
für $2s = a$ gilt $r \leq 2q$.

b) bei nicht positiven Werten q,r,s:
Für $a = b$ gilt $q \geq r$
für $b = c$ gilt $r \geq s$.
Für $-2q = b$ gilt $s = 0$
für $-2r = a$ gilt $s = 0$ und
für $-2s = a$ gilt $r = 0$.
Im Falle $-2(q+r+s) = a+b$ gilt $a \leq -2r-s$.

Indem man, falls notwendig, durch Wechsel des Vorzeichens von zweien der drei Werte x,y,z zu einer zu f äquivalenten Form übergeht, kann stets erreicht werden, dass die Werte q,r,s entweder alle positiv oder alle nicht positiv sind.

Diese Kriterien für die Reduziertheit von Formen stammen von Eisenstein (10), der von Seeber (42) angegebene Bedingungen vereinfachte. Dirichlet (8a) zeigte, dass es damit in jeder Klasse äquivalenter Formen genau eine reduzierte gibt. Eine Tabelle reduzierter Formen für die Determinanten 1 bis 100 wurde von Eisenstein (10) aufgestellt; eine Tabelle für die Determinanten 1 bis 200 wurde angegeben von E. Borissow (2), sowie von B.W.Jones (20). Angaben über die Gestalt und die Anzahl reduzierter Formen zu einer bestimmten Determinante werden im folgenden stets aus Eisenstein's Tabelle (10) entnommen.

3.5 Ist $f = ax^2 + by^2 + cz^2 + 2qyz + 2rxz + 2sxy$ und wird

$$\tilde{a} = \begin{vmatrix} b & q \\ q & c \end{vmatrix},\ \tilde{b} = \begin{vmatrix} a & r \\ r & c \end{vmatrix},\ \tilde{c} = \begin{vmatrix} a & s \\ s & b \end{vmatrix},\ \tilde{q} = -\begin{vmatrix} a & s \\ r & q \end{vmatrix},\ \tilde{r} = \begin{vmatrix} s & b \\ r & q \end{vmatrix},\ \tilde{s} = -\begin{vmatrix} s & q \\ r & c \end{vmatrix}$$

gesetzt, so bezeichnet man die Form $\tilde{f} = \tilde{a}x^2+\tilde{b}y^2+\tilde{c}z^2+2\tilde{q}yz+ 2\tilde{r}xz + 2\tilde{s}xy$ als die zu f adjungierte Form.

3.6 Ist $\Omega > 0$ der grösste gemeinsame Teiler der Zahlen $\tilde{a},\tilde{b},\ldots,\tilde{s}$, so ist Ω^2 ein Teiler der Determinante D von f; d.h. es gilt $D = \Omega^2\Delta$.

Die Form $\mathfrak{f} = \frac{1}{\mathfrak{R}} \tilde{f}$ heisst die zu f reziproke Form; sie hat die Determinante $\Delta^2 \mathfrak{R}^{2}$.[2)]

3.7 Ist w ein ungerader Teiler der Determinante D einer Form f, so hat das Legendre - Symbol $(\frac{n}{w})$ für alle durch f darstellbaren Zahlen[3)] n denselben Wert, dieser wird mit $(\frac{f}{w})$ bezeichnet.

Ist D ungerade, $D = \mathfrak{R}^2\Delta$ und sind $w_1,\ldots,w_i$ alle Primzahlen, die $\mathfrak{R}$, aber nicht Δ teilen, sind $\tilde{w}_1,\ldots,\tilde{w}_j$ alle Primzahlen, die Δ, aber nicht $\mathfrak{R}$ teilen und sind $\bar{w}_1,\ldots,\bar{w}_k$ alle Primzahlen, die sowohl $\mathfrak{R}$ als auch Δ teilen, so nennt man die i+j+2k Zahlen

$$(\tfrac{f}{w_1}),\ldots,(\tfrac{f}{w_i});\quad (\tfrac{\mathfrak{f}}{\tilde{w}_1}),\ldots,(\tfrac{\mathfrak{f}}{\tilde{w}_j});\quad (\tfrac{f}{\bar{w}_1}),\ldots,(\tfrac{f}{\bar{w}_k}),(\tfrac{\mathfrak{f}}{\bar{w}_1}),\ldots,(\tfrac{\mathfrak{f}}{\bar{w}_k})$$

die Einzelcharaktere von f.

Alle Formen f mit denselben Werten $\mathfrak{R},\Delta$ und denselben Einzelcharakteren fasst man zu einem Geschlecht von Formen zusammen. Da äquivalente Formen dieselben Zahlen darstellen, so gehören Formen einer Klasse auch demselben Geschlecht an. Zu vorgegebenem $\mathfrak{R},\Delta$ gibt es genau 2^{i+j+2k} Geschlechter (vgl. etwa Bachmann (1), Seite 125).

Für gerade Determinanten D müssen zur Kennzeichnung der Formen eines Geschlechts noch weitere Bedingungen gestellt werden (vgl. etwa H.J.S. Smith (43,I)).

3.8 Gehören zwei Formen f und g demselben Geschlecht an, so gibt es eine Transformation mit rationalen Koeffizienten und der Determinante 1, die f in g überführt (vgl. etwa Bachmann (1), Seite 128).

3.9 Jede ternäre Form f der Determinante D stellt alle Zahlen n nicht dar, die in folgenden Progressionen liegen:

3.9-1 $$2^r(8q + a'_j),\ p_j^{r_j}(p_jq + a_{ij}) \qquad (q = 0,1,2,\ldots)$$

Dabei sind die p_j ungerade Primzahlen, die D teilen; die Zahlen a_{ij} durchlaufen die Reste oder Nichtreste mod. p_j; die a'_j sind einige oder alle der Zahlen 1,3,5,7 und die Werte r und r_j nehmen einige oder alle

nicht negativen ganzen Zahlen an.

Eine genaue Bestimmung der Werte $p_j, a_{ij}, a'_j, r, r_j$ in Abhängigkeit von der gegebenen Form f wird bei B.W. Jones (21) durchgeführt. Es seien hier nur die am häufigsten auftretenden Fälle angeführt:

3.91 Ist $f = ax^2+by^2+pcz^2$ mit $(a,p) = (b,p) = (c,p) = 1$, p Primzahl, $p > 2$, so ergeben sich die folgenden Progressionen in Abhängigkeit von $(\frac{-ab}{p})$:

3.91-1: $(\frac{-ab}{p}) = 1$: keine

3.91-2: $(\frac{-ab}{p}) = -1$: $p^{2k+1}(pq + v)$ mit $(\frac{v}{p}) = -(\frac{c}{p})$, $v \neq 0$, $k,q = 0,1,\ldots$

3.92 Für $f = ax^2+bpy^2 + cpz^2$ mit $(a,p) = (b,p) = (c,p) = 1$, p Primzahl, $p > 2$ erhält man in Abhängigkeit von $(\frac{-bc}{p})$ die Progressionen:

3.92-1: $(\frac{-bc}{p}) = 1$: $pq + v$ mit $(\frac{v}{p}) = -(\frac{a}{p})$, $v \neq 0$, $q = 0,1,2,\ldots$

3.92-2: $(\frac{-bc}{p}) = -1$: $p^{2k}(pq + v)$ mit $(\frac{v}{p}) = -(\frac{a}{p})$, $v \neq 0; k,q = 0,1,2,\ldots$

3.93 Ist $f = ax^2+by^2+cz^2$ mit $abc \equiv 1 \ (8)$, so ergibt sich die Progression $4^k(8q + 7)$ $(k,q = 0,1,2,\ldots)$, falls $a \equiv b \equiv c \equiv 1 \ (4)$ gilt; ist diese Bedingung nicht erfüllt, so erhält man keine Progression.

3.94 Für $f = ax^2+by^2+2cz^2$ mit $abc \equiv 1 \ (8)$ erhält man in Abhängigkeit von $a + b$ folgende Progressionen:

3.94-1 : $a + b \equiv \begin{cases} 2 \\ 4 \end{cases} (8)$: $4^k(16q + 14)$ $\quad k,q = 0,1,2,\ldots$

3.94-2 : $a + b \equiv \begin{cases} 0 \\ 6 \end{cases} (8)$: keine

3.95 Die Form $f = ax^2+2by^2+2cz^2$ mit $abc \equiv 1 \ (8)$ bedingt in Abhängigkeit von $b + c$ die Progressionen:

3.95-1 : $b + c \equiv \begin{cases} 2 \\ 4 \end{cases} (8)$: $4^k(8q + 7)$ $\quad k,q = 0,1,2,\ldots$

3.95-2 : $b + c \equiv \begin{cases} 0 \\ 6 \end{cases} (8)$: $8q + 3$ $\quad q = 0,1,2,\ldots$

Anmerkung: Die durch 3.9-1 für eine Form f definierten Progressionen werden im folgenden kurz als Ausnahmeprogressionen bezeichnet.

3.10 B.W. Jones (21),(22) zeigte, dass jede Form eines Geschlechts

dieselben Ausnahmeprogressionen besitzt und dass alle Formen derselben Determinante mit denselben Ausnahmeprogressionen ein Geschlecht bilden. Gleichbedeutend mit einem Geschlecht ternärer Formen ist also eine Reihe von Ausnahmeprogressionen, so dass jede Zahl, die in einer dieser Progressionen liegt, von keiner Form des Geschlechts dargestellt wird. Dagegen wird jede Zahl, die in keiner dieser Progressionen liegt, von mindestens einer Form des Geschlechts dargestellt.

3.11 Die Form f heisst regulär, wenn sie alle Zahlen n darstellt, die nicht in den Ausnahmeprogressionen liegen. Nach 3.10 ist damit eine Form f genau dann regulär, wenn sie alle Zahlen, die durch das Geschlecht von f dargestellt werden, annimmt. Insbesondere ist also jede Form, die die einzige reduzierte Form ihres Geschlechts ist, regulär. Sind mehrere reduzierte Formen in einem Geschlecht vorhanden, so kann zum Nachweis der Regularität einer dieser Formen 3.8 benutzt werden.

3.12 Die Regularität der Formen (1,1,1),(1,1,2),(1,1,3),(1,1,5),(1,1,6) (1,2,2),(1,2,5),(1,3,3),(1,2,4) wurde von Dirichlet (8b) bzw. Dickson (4),(5) teils durch Verwendung der Dirichlet'schen Methode, teils durch Zurückführung auf schon bekannte Formen (z.B. wird (1,2,4) auf (1,1,2) und (1,2,2) zurückgeführt) bewiesen. Dirichlet zeigt die Regularität einer Form folgendermassen: Um nachzuweisen, dass die Form f der Determinante D die Zahl n darstellt, bildet er eine Form g, bei der n der Koeffizient von x^2 ist. Von g beweist er nun, dass sie zu jeder reduzierten Form $\neq$ f der Determinante D nicht äquivalent ist; folglich ist g äquivalent zu f.

Die Regularität der Formen (1,1,1),(1,1,2),(1,1,3),(1,1,5),(1,1,6) (1,2,2),(1,2,5),(1,3,3) kann auch sofort mit Hilfe von 3.9 und 3.11 erhalten werden.

3.13 Eine Tabelle sämtlicher regulärer Formen (a,b,c) wurde 1939 von B.W. Jones und G. Pall (24) aufgestellt. Es gibt 102 reguläre Formen.

3.14 Im Folgenden bedeutet die Aussage: f stellt jede Zahl $\neq Q$ dar, dass f genau die Zahlen $n \geq 0$ darstellt, die nicht zur Menge Q gehören.

§ 4. Die regulären Formen (1,1,4),(1,1,8),(1,1,9),(1,3,4) (2,2,3),(1,2,8),(1,5,5).

Die Aussagen über die Formen dieses und des nächsten Paragraphen können durch Anwendung von 3.9, 3.10 und 3.11 gewonnen werden. Doch da diese Formen ohne allzu grosse Mühe auf bekannte Formen zurückgeführt werden können, sollen auf diesem Wege Ergebnisse über sie hergeleitet werden.

4.1 Die Form (1,1,4) stellt alle Zahlen $\neq \{4^k(8q+7),\ 4q+3\}$ dar.

Beweis. a) Da $x^2+y^2+4z^2 \equiv 0,1,2\ (4)$ ist, so stellt (1,1,4) keine Zahl $4q+3$ dar.

b) Ist $n \neq 4^k(8q+7)$, so wird n durch $f = x^2+y^2+z^2$ dargestellt. Ist ferner $n \not\equiv 3\ (4)$, so ist eine der Zahlen x,y,z gerade (denn aus $x \equiv y \equiv z \equiv 1\ (2)$ folgt $x^2+y^2+z^2 \equiv 3\ (4)$). Da die Form f in x,y,z symmetrisch ist, kann o.B.d.A. $z = 2w$ angenommen werden. Damit gilt $n = x^2+y^2+4w^2$.

c) Aus der Annahme $n = 4^k(8q+7) = x^2+y^2+4z^2$ folgt $n = x^2+y^2+(2z)^2$ im Widerspruch zu 3.12.

4.2 Die Form (1,1,8) stellt alle Zahlen $\neq \{4^k(16q+14),\ 4q+3,\ 8q+6\}$ dar.

Beweis. a) Ist $n \neq 4^k(8q+7)$ und $n \neq 4q+3$, so gibt es nach 4.1 Zahlen x,y,z, so dass $n = x^2+y^2+4z^2$ gilt. Damit wird $2n = 2x^2+2y^2+8z^2 =$ $= (x+y)^2+(x-y)^2+8z^2$. Ist also $2n \neq 4^k(16q+14),\ 8q+6$, so wird 2n durch (1,1,8) dargestellt.

Umgekehrt folgt aus $2n = x^2+y^2+8z^2$ die Bedingung $x^2+y^2 \equiv 0\ (2)$; es gilt somit $x+y = 2u$, $x-y = 2v$. Damit wird $2n = (u+v)^2+(u-v)^2+8z^2 =$ $= 2u^2+2v^2+8z^2$, $n = u^2+v^2+4z^2$.

Die Form (1,1,8) stellt alle Zahlen $2n \neq \{4^k(16q+14),\ 8q+6\}$ dar.

b) Ist $n \equiv 1\ (4)$, so wird n durch die Form $g = (1,1,2)$ dargestellt; folglich gibt es Zahlen x,y,z, so dass $n = x^2+y^2+2z^2 \equiv 1\ (4)$ gilt. Hieraus sieht man, dass x oder y ungerade sein muss; da g symmetrisch ist in x und y, so kann o.B.d.A. $x \equiv 1\ (2)$, $y \equiv 0\ (2)$ angenommen werden. Dann folgt $2z^2 \equiv 0\ (4)$, $z = 2w$ und damit $n = x^2+y^2+8w^2$.

c) Da $x^2+y^2+8z^2 \not\equiv 3\ (4)$ ist, so stellt (1,1,8) keine Zahl 4q+3 dar.

4.3 Die Form (1,1,9) stellt alle Zahlen $\neq \{4^k(8q+7),\ 9q+3,\ 9q+6\}$ dar.

Beweis. a) Ist $n \neq 4^k(8q+7)$ und $n \not\equiv 0\ (3)$, so gibt es Zahlen x,y,z, so dass $n = x^2+y^2+z^2$ gilt. Hierbei können nicht alle drei Werte x,y,z inkongruent Null mod. 3 sein, da sonst $n \equiv 0\ (3)$ gelten würde. O.B.d.A. kann somit $z = 3w$ angenommen werden; es folgt damit $n = x^2+y^2+9w^2$.

Umgekehrt folgt aus $n = x^2+y^2+9w^2$: $n = x^2+y^2+(3w)^2$. (1,1,9) stellt also keine Zahl $4^k(8q+7)$ dar.

b) Aus der Annahme $x^2+y^2+9z^2 \equiv 0\ (3)$ folgt $x^2+y^2 \equiv 0\ (3)$ und hieraus $x = 3u$, $y = 3v$; somit ist dann stets $x^2+y^2+9z^2 \equiv 0\ (9)$. (1,1,9) stellt daher keine Zahl 9q+3, 9q+6 dar. Stellt die Form (1,1,9) eine Zahl 9m dar, so stellt (1,1,1) die Zahl m dar. Umgekehrt folgt aus $m = u^2+v^2+z^2$ $9m = (3u)^2+(3v)^2+9z^2$.

(1,1,9) stellt somit jede Zahl $\neq \{4^k(8q+7),\ 9q+3,\ 9q+6\}$ dar.

4.4 Die Form (1,3,4) stellt alle Zahlen $\neq \{3^{2k+1}(3q+2),\ 4q+2\}$ dar.

Beweis. a) Aus der Annahme $x^2+3y^2+4z^2 = 2n$ folgt $x \equiv y\ (2)$, dann ist aber $x^2+3y^2 \equiv 0\ (4)$. (1,3,4) stellt also keine Zahl 4q+2 dar.

b) Ist $n \neq 3^{2k+1}(3q+2)$, so gibt es Zahlen x,y,z, so dass $n = x^2+z^2+3y^2$ gilt.

1) Sind hierin x und z beide ungerade, so ist

$x^2+z^2+3y^2 \equiv \begin{cases} 2\ (4) & \text{für } y \equiv 0\ (2) \\ 1\ (4) & \text{für } y \equiv 1\ (2) \end{cases}$. Ist also $n \equiv \begin{cases} 0 \\ 3 \end{cases}\ (4)$, so muss eine der beiden Zahlen x oder z gerade sein; o.B.d.A. kann $z = 2w$ angenommen werden, damit ergibt sich $n = x^2+3y^2+4w^2$.

2) Ist $n \equiv 1\ (4)$, so kann auftreten:

A) $x \equiv 1\ (2)$, $z \equiv 1\ (2)$, $y \equiv 1\ (2)$

B) $x \equiv 1\ (2)$, $z \equiv 0\ (2)$, $y \equiv 0\ (2)$ ($z = 2w$ kann o.B.d.A. aus Symmetriegründen angenommen werden).

Im Falle A) kann stets $y+z \equiv 0\ (4)$ angenommen werden. Denn ist $y+z \equiv 2\ (4)$, so gilt auch $n = x^2+(-z)^2+3y^2$ und es ist $y+z' = y-z \equiv 2-2 \equiv 0\ (4)$ mit $z' = -z$. Damit ist stets im Fall A) $y+z = 4v$, $3y-z = 4w$. Da nun aber $x^2+z^2+3y^2 = x^2+(\frac{3y-z}{2})^2+3(\frac{y+z}{2})^2$ gilt, so ist $n = x^2+3(2v)^2+4w^2$.

Im Fall B) folgt sofort $n = x^2+3y^2+4w^2$.

<u>4.5</u> Die Form (2,2,3) stellt alle Zahlen $\neq\{3^{2k+1}(3q+2),\ 8q+1\}$ dar.

Beweis. Ist $n \neq 3^{2k+1}(3q+2)$, so wird n durch $x^2+y^2+3z^2$ dargestellt.

a) Dann ist $4n = 4x^2+4y^2+3(2z)^2 = 2(x+y)^2+2(x-y)^2+3(2z)^2 =$
$= 2u^2+2v^2+3w^2$. (2,2,3) stellt somit alle $4n$ dar $\neq 3^{2k+1}(3.4q+8) =$
$= 3^{2k+1}(3(4q+2)+2)$.

b) Ist $x \not\equiv y\ (2)$, so ist $x^2+y^2+3z^2 \equiv \begin{cases} 1\ (4) & \text{für gerades } z \\ 0\ (4) & \text{für ungerades } z \end{cases}$.

Ist daher $n \neq 3^{2k+1}(3q+2)$ und $n \equiv \begin{cases} 2 \\ 3 \end{cases}\ (4)$, so ist $x+y = 2u$, $x-y = 2v$ und folglich $n = x^2+y^2+3z^2 = (u+v)^2+(u-v)^2+3z^2 = 2u^2+2v^2+3z^2$.

c) Wird $n = 8m+5$ durch (1,1,3) dargestellt, so muss gelten:

A) $x \equiv 1\ (2)$, $y \equiv 2\ (4)$, $z \equiv 0\ (4)$ oder $x \equiv 1\ (2)$, $y \equiv 0\ (4)$, $z \equiv 2\ (4)$

B) $x \equiv 1\ (2)$, $y \equiv 1\ (2)$, $z \equiv 1\ (2)$.

Im Falle A) ist $\frac{1}{2}(3z-y) = v \equiv 1\ (2)$. Da $n = x^2+y^2+3z^2 =$
$= x^2+(\frac{3z-y}{2})^2+3(\frac{z+y}{2})^2 = x^2+v^2+3w^2$ gilt, so ist damit eine Darstellung von n gefunden, bei der $x \equiv v\ (2)$ ist.

Setzt man im Falle B), $y = v$, $z = w$, so gilt bei A) und B) $x-v = 2u_1$, $x+v = 2v_1$ und $n = (u_1+v_1)^2+(u_1-v_1)^2+3w^2 = 2u_1^2+2v_1^2+3w^2$.

d) Die Annahme $2x^2+2y^2+3z^2 \equiv 1\ (8)$ bedingt $z \equiv 1\ (2)$ und damit muss $2x^2+2y^2 \equiv 6\ (8)$ gelten, also $x^2+y^2 \equiv 3\ (4)$ sein, dies ist aber unmöglich.

e) Da aus $n = 2x^2+2y^2+3z^2$ $\quad n = (x+y)^2+(x-y)^2+3z^2$ folgt, so stellt die Form (2,2,3) keine Zahl $3^{2k+1}(3q+2)$ dar.

4.6 Die Form (1,2,8) stellt alle Zahlen $\neq\{4^k(8q+7),\ 8q+5\}$ dar.

Beweis. Ist $n \neq 4^k(8q+7)$, so gibt es Zahlen u,v,w, so dass $n = u^2+v^2+w^2$ gilt. Ist dabei $u \equiv 0\ (2)$, $v \equiv 1\ (2)$, so wird $n \equiv 1 + \begin{cases} 0 \equiv 1\ (4) & \text{für gerades } w \\ 1 \equiv 2\ (4) & \text{für ungerades } w \end{cases}$. Falls also $n \equiv \begin{cases} 0 \\ 3 \end{cases}\ (4)$ ist, so ist $u \equiv v\ (2)$, $2u^2+w^2 \equiv n\ (4)$.

a) Im Falle $n \equiv 0\ (4)$ folgt $w \equiv 0\ (2)$ und $u \equiv 0\ (2)$.

A) Sind u und v beide von der Form 4m+2 bzw. 4m, so ist $u-v = 4z$.

B) Ist $u \equiv 0\ (4)$, $v \equiv 2\ (4)$, so ist entweder $u-w = 4z$ falls $w \equiv 0\ (4)$ oder $v-w = 4z$, falls $w \equiv 2\ (4)$ gilt.

b) Im Falle $n \equiv 3\ (4)$ folgt $w \equiv 1\ (2)$ und $u \equiv 1\ (2)$. Indem man, falls notwendig, u durch -u ersetzt, kann somit stets $u-v = 4z$ erreicht werden.

c) Im Falle $n \equiv 2\ (4)$ ist entweder $u \equiv v\ (2)$, $w \equiv 0\ (2)$, $u \equiv 1\ (2)$, dann ist $u-v = 4z$ oder $u \equiv 0\ (2)$, $v \equiv 1\ (2)$, $w \equiv 1\ (2)$ und damit $v-w = 4z$.

d) Im Falle $n \equiv 1\ (4)$ ist entweder (C) $u \equiv v\ (2)$, $w \equiv 1\ (2)$, $u \equiv 0\ (2)$, oder (D) $u \equiv 0\ (2)$, $v \equiv 1\ (2)$, $w \equiv 0\ (2)$. Im Falle (C) bzw. (D) ist entweder $u-v = 4z$ bzw. $u-w = 4z$ oder es ist $u \equiv 0\ (4)$, v bzw. $w \equiv 2\ (4)$; dann ist aber $u^2+v^2+w^2 \equiv 4+1 \equiv 5\ (8)$.

Damit ergibt sich: Falls $n \equiv 0,2,3\ (4)$ oder $n \equiv 1\ (8)$ gilt, so lassen sich die Zahlen u,v,w stets so bestimmen, dass für zwei dieser Werte die Differenz durch vier teilbar ist. Da $u^2+v^2+w^2$ symmetrisch ist in u,v,w, kann o.B.d.A. angenommen werden, es sei $u-v = 4z$; setzt man nun $2y = u+v = 4z+2v$, so folgt $u = y+2z$, $v = y-2z$ und $n = (y+2z)^2+(y-2z)^2+w^2 = w^2+2y^2+8z^2$.

e) Die Annahme, es sei $x^2+2y^2+8z^2 \equiv 5\ (8)$ führt zu $x^2+2y^2 \equiv 5\ (8)$ und daraus folgt $x \equiv 1\ (2)$, $2y^2 \equiv 4\ (8)$, also $y^2 \equiv 2\ (4)$; dies ist jedoch unmöglich.

f) Ist $n = x^2+2y^2+8z^2$, so ist auch $n = x^2+(y+2z)^2+(y-2z)^2$.

4.7 Die Form (1,5,5) stellt alle Zahlen $\neq\{4^k(8q+7),\ 5q+2,\ 5q+3\}$ dar.

Beweis. a) Da $f = x^2+5y^2+5z^2 \equiv 0,1,4\ (5)$ ist, so stellt f die Zahlen $5q+2$, $5q+3$ nicht dar.

b) Ist $n \neq 4^k(8q+7)$, so wird n durch $g = u^2+v^2+w^2$ dargestellt. Eine Tabelle der auftretenden Reste mod. 5 von $u^2+v^2+w^2$ gibt Aufschluss über die möglichen Restklassen u,v,w mod. 5.

u^2 \ v^2	0	1	4
0	0	1	4
1	1	2	0
4	4	0	3

Reste u^2+v^2 mod 5

u^2 \ v^2	0	1	4
0	0	1	4
1	1		0
2			1
3		4	
4	4	0	

Reste $u^2+v^2+w^2$ mod 5

In das Restesystem sind nur die Reste 0,1,4 eingetragen.

Ist $n \equiv 0\ (5)$, so ist

A) $w \equiv 0\ (5)$ $u \equiv 0\ (5)$ $v \equiv 0\ (5)$
$u \equiv \pm 1\ (5)$ $v \equiv \pm 2\ (5)$
$u \equiv \pm 2\ (5)$ $v \equiv \pm 1\ (5)$

Indem man, falls notwendig, u bzw. v durch -u bzw. -v ersetzt, lässt sich stets $u+2v \equiv 5z$ erreichen.

B) $w \equiv \pm 1\ (5)$ $u \equiv 0\ (5)$ $v \equiv \pm 2\ (5)$
$u \equiv \pm 2\ (5)$ $v \equiv 0\ (5)$

C) $w \equiv \pm 2\ (5)$ $u \equiv 0\ (5)$ $v \equiv \pm 1\ (5)$
$u \equiv \pm 1\ (5)$ $v \equiv 0\ (5)$

In den Fällen B), C) ist stets $w+2v \equiv 5z$ bzw. $w+2u \equiv 5z$ erreichbar. Indem man ebenso die restlichen Fälle $n \equiv \begin{cases} 1 \\ 4 \end{cases}\ (5)$ untersucht, zeigt sich, dass stets eine der Kongruenzen $u+2v \equiv 0\ (5)$, $w+2v \equiv 0\ (5)$, $w+2u \equiv 0\ (5)$ erreichbar ist. O.B.d.A. kann angenommen werden, es sei stets $u+2v \equiv 5z$, dann ist auch $2u+4v \equiv 2u-v \equiv 0\ (5)$, also $2u-v \equiv 5y$; hieraus erhält man $u \equiv z+2y$, $v \equiv 2z-y$. Damit wird aus $n = u^2+v^2+w^2$: $n = (z+2y)^2+(2z-y)^2+w^2$, es gilt also $n = w^2+5y^2+5z^2$.

c) Ist $n = x^2+5y^2+5z^2$, so ist auch $n = x^2+(z+2y)^2+(2z-y)^2$.

§ 5. Die regulären Formen (1,2,6),(1,3,6),(1,4,6),(2,3,3), (1,5,10),(1,5,8),(1,1,12),(1,2,3),(2,3,9).

5.1 Die Form f = (1,2,6) stellt alle Zahlen $\neq \{4^k(8q+5)\}$ dar.

Beweis. Die Form $g = x^2+2y^2+2z^2-2yz$ ist regulär, da es genau zwei reduzierte Formen und Geschlechter der Determinante 3 gibt. Die Form $2g = (2y-z)^2+2x^2+3z^2$ stellt nach 3.9 alle geraden Zahlen $\neq\{4^k(16q+10)\}$ dar; daher nimmt g alle Werte $\neq\{4^k(8q+5)\}$ an.

Wird n durch g dargestellt, so können folgende Fälle eintreten:

a) y und z sind ungerade

b) eine der beiden Zahlen ist gerade, o.B.d.A. kann y = 2v angenommen werden. Da nun aber $2y^2+2z^2-2yz = 2(z-y)^2+2z^2-2z(z-y)$ gilt, so erhält man auch im Fall a) eine Darstellung von n durch g mit geradem y' = z-y. Es kann also stets y = 2v erreicht werden, dann ist aber $n = x^2+2(2v)^2+2z^2-2z(2v) = x^2+8v^2+2z^2-4vz = x^2+2(z-v)^2+6v^2$.

Umgekehrt folgt aus $n = x^2+2y^2+6z^2$ stets $n = x^2+2(z-v)^2+6z^2 = x^2+2v^2+2(2z)^2-2v(2z)$.

5.2 Die Form (1,3,6) stellt alle Zahlen $\neq\{4^k(16q+14),3q+2\}$ dar.

Beweis. Ist $n \neq 4^k(16q+14)$, so gilt $n = u^2+v^2+2w^2$.

a) Im Falle $n \equiv 1\ (3)$ folgt hieraus (A) $w \equiv 0\ (3)$, $u^2+v^2 \equiv 1\ (3)$

(B) $w \not\equiv 0\ (3)$, $u^2+v^2 \equiv 2\ (3)$

A) Aus $u^2+v^2 \equiv 1\ (3)$ kann o.B.d.A. $u \equiv 0\ (3)$ gefolgert werden, dann ist $u-w \equiv 0\ (3)$.

B) Aus $u^2+v^2 \equiv 2\ (3)$ folgt $u \not\equiv 0\ (3)$, $v \not\equiv 0\ (3)$. Indem man, falls notwendig, w durch -w ersetzt, ergibt sich auch hier $u-w \equiv 0\ (3)$.

b) Ist $n \equiv 0\ (3)$, so erhält man

A) $w \equiv 0\ (3)$, $u^2+v^2 \equiv 0\ (3)$, damit wird $u \equiv 0\ (3)$ und $u-w \equiv 0\ (3)$

B) $w \not\equiv 0\ (3)$, $u^2+v^2 \equiv 1\ (3)$. Hieraus folgt o.B.d.A. $u \not\equiv 0\ (3)$ und daraus wie in aB) $u-w \equiv 0\ (3)$.

In den Fällen a) und b) ist es also stets möglich, $u-w = 3z$ zu erhalten. Setzt man nun $3y = u+2w$, so erhält man $w = y-z$, $u = y+2z$ und $n = u^2+v^2+2w^2 = (y+2z)^2+v^2+2(y-z)^2 = v^2+3y^2+6z^2$.

c) Aus $n = x^2+3y^2+6z^2$ folgt $n = x^2+(y+2z)^2+2(y-z)^2$.

d) Da $x^2+3y^2+6z^2 \equiv x^2 \equiv 0,1\ (3)$ ist, so stellt (1,3,6) keine Zahlen $3q+2$ dar.

5.3 Die Form (1,4,6) stellt alle Zahlen $\neq\{3^{2k+1}(3q+1),\ 16q+2\}$ dar.

Beweis. a) Ist $n \neq 3^{2k+1}(3q+2)$, $n \neq 8q+1$, so gilt nach 4.5 $n = 2x^2+2y^2+3z^2$; damit wird $2n = (2x)^2+4y^2+6z^2$. Umgekehrt folgt aus $x^2+4y^2+6z^2 = 2n : x = 2u$ und damit $n = 2u^2+2y^2+3z^2$.

b) Ist $n \neq 3^{2k+1}(3q+1)$, so gibt es Zahlen x,y,z, so dass $x^2+y^2+6z^2 = n$ gilt. Sind hierbei x und y beide ungerade, so folgt $n \equiv 0\ (2)$. Ist somit n ungerade, so ist wenigstens eine der Zahlen x oder y gerade; o.B.d.A. kann $y = 2v$ angenommen werden, dann gilt $n = x^2+4v^2+6z^2$.

c) Aus einer Darstellung $n = x^2+4y^2+6z^2$ folgt $n = x^2+(2y)^2+6z^2$.

5.4 Die Form $f = 2x^2+3y^2+3z^2$ stellt alle Zahlen $\neq\{3^{2k}(3q+1)\}$ dar.

Beweis. Stellt f eine Zahl n dar, so folgt $3n = (3z)^2+(3y)^2+6x^2$. Umgekehrt folgt aus $3n = v^2+w^2+6x^2$, dass $v = 3y$, $w = 3z$ und damit $n = 2x^2+3y^2+3z^2$ ist. Die Form f stellt damit genau dann eine Zahl n dar, wenn $g = v^2+w^2+6x^2$ die Zahl 3n darstellt.

5.5 Die Form $f = x^2+5y^2+10z^2$ stellt alle Zahlen $\neq\{5^{2k}(5q\pm2)\}$ dar.

Beweis. Aus $n = x^2+5y^2+10z^2$ folgt $5n = 5x^2+(5y)^2+2(5z)^2 = v^2+2w^2+5x^2$. Umgekehrt folgt aus $5n = v^2+2w^2+5x^2$, dass $v^2+2w^2 \equiv 0\ (5)$, $v = 5y$, $w = 5z$ und damit $n = x^2+5y^2+10z^2$ gilt. Genau dann stellt also f eine Zahl n dar, wenn die Form (1,2,5) die Zahl 5n darstellt.

5.6 Die Form (1,5,8) stellt alle Zahlen $\neq\{5^{2k+1}(5q+e),\ 8q+f \mid e=2,3; f=2,3,$ dar.

Beweis. a) Da $x^2+5y^2 \neq 2,3,7\ (8)$ ist, so stellt (1,5,8) keine Zahl $8q+f$ dar.

b) Ist $n \neq 5^{2k+1}(5q+e)$, so wird n von (1,2,5) dargestellt. Da $x^2+2y^2+5z^2 \equiv x^2+2y^2+z^2$ (4) und $x^2+z^2 \equiv 0,1,2$ (4) ist, so folgt aus $n \equiv 1$ (4): $2y^2 \equiv 1,0,3$ (4); die Kongruenzen $2y^2 \equiv 1,3$ (4) sind unmöglich, folglich muss $2y^2 \equiv 0$ (4) und damit $y \equiv 0$ (2) gelten. Ist somit $n \equiv 1$ (4), so stellt (1,2,5) die Zahl n mit geradem y dar.

c) Aus $x^2+5y^2+8z^2 = 4m$ folgt $x^2+y^2 \equiv 0$ (4), damit ist $x = 2u$, $y = 2v$ und $m = u^2+5v^2+2z^2$. Umgekehrt folgt aus $m = u^2+2z^2+5v^2$: $4m =$ $= (2u)^2+5(2v)^2+8z^2$. Genau dann stellt somit (1,5,8) die Zahl 4m dar, wenn (1,2,5) die Zahl m darstellt.

d) Zahlen 8m+6: Stellt (1,2,5) die Zahl $n \equiv 6$ (8) dar, so folgt aus $x^2+2y^2+5z^2 \equiv 6$ (8) $x^2+z^2+2y^2 \equiv 2$ (4). Hieraus erhält man

A) $x \equiv z \equiv 0$ (2), $y \equiv 1$ (2) oder

B) $x \equiv z \equiv 1$ (2), $y \equiv 0$ (2); d.h. $y = 2v$. Damit ergibt sich aus $n = x^2+2y^2+5z^2$: $n = x^2+5z^2+8v^2$.

Im Fall A) mit $x = 2u$, $z = 2w$ folgt $x^2+2y^2+5z^2 = 4u^2+2y^2+20w^2 \equiv$ $\equiv 2y^2+4u^2+4w^2 \equiv 6$ (8) falls $u^2+w^2 \equiv 1$ (2), also $u+w \equiv 1$ (2), $x+w \equiv 2$ (4) ist. Die Substitution

5.6-1 $\quad u_1 = \frac{1}{4}(3x+2y-5z) \quad v_1 = \frac{1}{4}(x+2y+5z) \quad w_1 = \frac{1}{4}(-x+2y-z)$

führt die Form $u_1^2+2v_1^2+5w_1^2$ über in $x^2+2y^2+5z^2$.

1) $x+z \equiv 2$ (8): Da $z \equiv 0$ (2) ist, so ist $x+5z \equiv 2$ (8). Da ferner $2y \equiv \{\begin{smallmatrix}2\\6\end{smallmatrix}$ (8) ist, so gilt, indem man für $2y \equiv 2$ (8) y durch -y ersetzt, stets $2y \equiv 6$ (8) und $x+2y+5z \equiv 2+6 \equiv 0$ (8).

2) $x+z \equiv 6$ (8): Auch hier ist z gerade, damit wird $x+5z \equiv 6$ (8). Da stets $2y \equiv 2$ (8) erreicht werden kann (indem man, falls notwendig, y durch -y ersetzt), gilt $x+2y+5z \equiv 6+2 \equiv 0$ (8).

In jedem Fall ist somit $x+2y+5z \equiv 0$ (8), nach 5.6-1 wird daher v_1 gerade. Jede Zahl $n \equiv 6$ (8), die von (1,2,5) dargestellt wird, wird somit auch von $x^2+2y^2+5z^2$ mit geradem y dargestellt; d.h. sie wird von (1,5,8) angenommen.

e) Da aus $n \equiv x^2+5y^2+8z^2$ folgt $n \equiv x^2+2(2z)^2+5y^2$, so sieht man, dass die Form (1,5,8) die Zahlen $5^{2k+1}(5q+e)$ auslässt.

f) Zusammenfassend ergibt sich aus a), b), c), d), e): Die Form (1,5,8) stellt jede Zahl $\notin \{5^{2k+1}(5q+e),\ 8q+2,\ 8q+3,\ 8q+7 \mid e = 2,3\}$ dar.

5.7 Die Form (1,1,12) stellt jede Zahl $\notin \{3^{2k+1}(3q+2),\ 4q+3\}$ dar.

Beweis. Ist $n \notin 3^{2k+1}(3q+2)$, so wird n durch $f \equiv (1,1,3)$ dargestellt.

a) Zahlen 4m : Aus $n \equiv x^2+y^2+3z^2 \equiv 0\ (4)$ folgt

1) $x \equiv y \equiv z \equiv 0\ (2)$

2) $x^2+y^2 \equiv 1\ (2)$, $z \equiv 1\ (2)$. Da f symmetrisch ist in x und y, kann o.B.d.A. $x \equiv 0\ (2)$, $y \equiv z \equiv 1\ (2)$ angenommen werden.

b) Zahlen 4m+1: Aus $n \equiv x^2+y^2+3z^2 \equiv 1\ (4)$ folgt

1) $x^2+y^2 \equiv 1\ (4)$, $z \equiv 0\ (2)$; auch hier kann o.B.d.A. $x \equiv 0\ (2)$, $y \equiv 1\ (2)$, $z \equiv 0\ (2)$ angenommen werden.

2) $x \equiv y \equiv z \equiv 1\ (2)$.

Indem man, falls notwendig, z durch -z ersetzt, kann im Falle a2), b2) stets $y+z \equiv 0\ (4)$ erreicht werden. Da aber $x^2+y^2+3z^2 = x^2+\left(\frac{y-3z}{2}\right)^2+3\left(\frac{y+z}{2}\right)^2$ gilt, so folgt im Fall a2), b2) stets auch eine Darstellung von n mit geradem z.

c) Zahlen 4m+2: Aus $n \equiv x^2+y^2+3z^2 \equiv 2\ (4)$ folgt $x \equiv y \equiv 1\ (2)$, $z \equiv 0\ (2)$

O.B.d.A. kann somit für $n \not\equiv 3\ (4)$ angenommen werden, dass n durch (1,1,3) mit $z = 2w$ dargestellt wird. Dann ist $n = x^2+y^2+12w^2$. Umgekehrt folgt aus $n = x^2+y^2+12z^2$: $n = x^2+y^2+3(2z)^2$, womit man sieht, dass keine Zahlen $3^{2k+1}(3q+2)$, $4q+3$ durch (1,1,12) angenommen werden.

5.8 Die Form (1,2,3) stellt jede Zahl $\notin \{4^k(16q+10)\}$ dar.

Beweis. Nach 5.2 stellt (1,3,6) jede Zahl $3n \notin \{4^k(16q+14)\}$ dar. Aus $3n = x^2+3y^2+6z^2$ folgt $x = 3u$ und $n = y^2+2z^2+3u^2$. Umgekehrt folgt aus $n = y^2+2z^2+3u^2$, dass $3n = (3u)^2+3y^2+6z^2$ gilt. Damit stellt (1,2,3) genau dann eine Zahl n dar, wenn (1,3,6) die Zahl 3n darstellt. Hieraus ergibt sich die Behauptung.

5.9 Die Form (2,3,9) stellt jede Zahl $\neq\{3q+1,\ 4^k(48q+26),\ 4^k(48q+42)\}$ und $\neq\{9q+6\}$ dar.

Beweis. a) Nach 5.2 stellt (1,3,6) jede Zahl $\neq\{4^k(16q+14),\ 3q+2\}$ dar. Aus $n = x^2+3y^2+6z^2$ folgt $3n = 3x^2+9y^2+18z^2 = 2(3z)^2+3x^2+9y^2$. Umgekehrt folgt aus $3n = 2w^2+3x^2+9y^2$ $w = 3z$ und $n = x^2+3y^2+6z^2$. Die Form (2,3,9) stellt somit jede Zahl $3n \neq\{4^k(48q+42),\ 9q+6\}$ dar.

b) Nach 5.8 wird jede Zahl $\neq\{4^k(16q+10)\}$ durch (1,2,3) dargestellt. Ist n nicht von dieser Ausnahmegestalt, sowie $n \equiv 2\ (3)$, so folgt aus $n = x^2+2y^2+3z^2$ die Kongruenz $x^2+2y^2 \equiv 2\ (3)$; es gilt also $x \equiv 0\ (3)$, $y \not\equiv 0\ (3)$; $x = 3u$ besagt aber $n = 2y^2+3z^2+9u^2$. Umgekehrt folgt aus $n = 2y^2+3z^2+9u^2$: $n = (3u)^2+2y^2+3z^2$. Damit stellt (2,3,9) jeden Wert $3m+2 \neq\{4^k(48q+26)\}$ dar.

c) Da $2x^2+3y^2+9z^2 \not\equiv 1\ (3)$ ist, so stellt (2,3,9) keine Zahl 3q+1 dar.

d) Aus a), b), c) folgt die Behauptung.

§ 6. Die Formen (1,2,9),(1,2,12),(1,5,6),(1,3,9),(1,4,4),(2,4,8).

6.1 Die Form (1,2,9) stellt alle Zahlen 2n,3n dar $\neq\{4^k(16q+14)\}$.

Beweis. a) Die Zahl $n \neq 4^k(8q+7)$ wird durch die Form $u^2+v^2+w^2$ dargestellt; dann ist $2n = 2u^2+2v^2+2w^2$. Sind hierbei u und v beide durch 3 teilbar bzw. nicht teilbar, so kann (indem man im zweiten Fall u.U. v durch -v ersetzt) stets $u-v \equiv 0\ (3)$ erreicht werden. Ist $u \equiv 0\ (3)$, $v \not\equiv 0\ (3)$, so ist $u-w \equiv 0\ (3)$, falls $w \equiv 0\ (3)$ oder $v-w \equiv 0\ (3)$, falls $w \not\equiv 0\ (3)$ ist. Für zwei der Werte u,v,w ist somit stets die Differenz durch drei teilbar; o.B.d.A. kann $u-w = 3z$ angenommen werden. Dann ist $2n = 2u^2+2v^2+2w^2 = (u+w)^2+(u-w)^2+2v^2 = x^2+2y^2+9z^2$ mit $u+w = x$, $v = y$.

b) Die Form (1,2,3) stellt nach 5.8 alle Zahlen $\neq\{4^k(16q+10)\}$ dar. Da nach Eisenstein diese Form die einzige reduzierte Form ihres Geschlechts ist, so muss die Form $f = 3u^2+y^2+3z^2+2uy$ zu (1,2,3) äquivalent

sein. Ist somit $n \neq 4^k(16q+10)$, so gilt $n = 3u^2+y^2+3z^2+2uy$, woraus $3n = 3y^2+9z^2+9u^2+6uy = (3u+y)^2+2y^2+9z^2$ folgt.

c) Da aus $n = x^2+2y^2+9z^2$ folgt $n = (3z)^2+x^2+2y^2$, so stellt (1,2,9) keine Zahl $4^k(16q+14)$ dar.

d) Die Form (1,2,9) ist nicht regulär, da die ungeraden Zahlen $5 \equiv 2\ (3)$ und $7 \equiv 1\ (3)$ nicht dargestellt werden und (1,2,9) ausser $4^k(16q+14)$ keine weiteren Ausnahmeprogressionen besitzt.

6.2 Die Form (1,2,12) stellt alle Zahlen $2n, 3n$ dar $\neq\{4^k(16q+10)\}$.

Beweis. a) Ist $n \neq 4^k(8q+5)$, so wird nach 5.1 n durch (1,2,6) dargestellt. Aus $n = x^2+2y^2+6z^2$ folgt aber $2n = (2y)^2+2x^2+12z^2$.

b) Die einzige reduzierte Form der Determinante 8 mit $\Omega = 2$ (vgl. 3.6) ist $f = (1,2,4)$. Da die Form $g = y^2+3u^2+4z^2+2uy$ der Determinante 8 ebenfalls $\Omega = 2$ besitzt, so muss g äquivalent zu f sein. Ist somit $n \neq 4^k(16q+14)$, so gilt $n = y^2+3u^2+4z^2+2uy$ und daraus folgt $3n = 3y^2+9u^2+12z^2+6uy = (3u+y)^2+2y^2+12z^2$; d.h. die Zahl 3n wird durch (1,2,12) dargestellt.

c) Da aus $n = x^2+2y^2+12z^2$ folgt $n = x^2+2y^2+3(2z)^2$, so stellt die Form (1,2,12) keine Zahl $4^k(16q+10)$ dar.

d) Die Form (1,2,12) ist nicht regulär, da die ungeraden Zahlen $5 \equiv 2\ (3)$ und $7 \equiv 1\ (3)$ nicht dargestellt werden und (1,2,12) keine weiteren Ausnahmeprogressionen besitzt.

6.3 Die Form g = (1,5,6) stellt alle Zahlen 2n,5n dar $\neq\{4^k(16q+2)\}$.

Beweis. a) Die Form $f = 2x^2+3y^2+3z^2-2xy$ ist die einzige reduzierte Form ihres Geschlechts, das durch $(\frac{5}{3}) = (\frac{2}{3}) = -1$, $(\frac{5}{5}) = (\frac{0}{5}) = 1$ (vgl. 3.6, 3.7) charakterisiert wird. f stellt damit alle Zahlen $\neq\{4^k(8q+1)\}$ dar (Die Ausnahmeprogressionen von f erhält man, indem man die Form 2f betrachtet und von ihr nach 3.9 die Ausnahmeprogressionen bestimmt). Aus $n = 2x^2+3y^2+3z^2-2xy$ folgt $2n = (2x-y)^2+5y^2+6z^2$.

b) Die Form (1,2,3) stellt nach 5.8 alle Zahlen $\neq\{4^k(16q+10)\}$ dar.

Aus $n = v^2+2u^2+3w^2$ folgt $5n = 5v^2+10u^2+15w^2 = 5v^2+(2u-3w)^2+6(u+w)^2 =$
$= x^2+5y^2+6z^2$ mit $x = 2u-3w$, $y = v$ und $z = u+w$.

c) Nach 3.91 kann es eine Ausnahmeprogression von (1,5,6) nur bezüglich der Zahl $p = 2$ geben. Diese bestimmt man folgendermassen: Aus $g = x^2+5y^2+6z^2$ folgt $7g = 7x^2+35y^2+42z^2$ und umgekehrt. Damit erhält man durch Anwendung von 3.94 auf $7g$ die Ausnahmeprogressionen $4^k(16q+2)$ von g. Da g die Zahl 3 nicht darstellt, ist g nicht regulär.

6.4 Die Form (1,3,9) stellt jede Zahl $\neq\{3q+2,\ 3^{2k+1}(3q+2)\}$ dar.

Beweis. Ist $n \neq 3^{2k+1}(3q+2)$, so gilt $n = x^2+y^2+3z^2$.

a) Aus $n \equiv 0\ (3)$ folgt $x^2+y^2 \equiv 0\ (3)$ und hieraus $x \equiv 0\ (3)$, $y \equiv 0\ (3)$; d.h. $y = 3v$.

b) Aus $n \equiv 1\ (3)$ folgt $x^2+y^2 \equiv 1\ (3)$, also x oder y durch drei teilbar; da x^2+y^2 symmetrisch ist in x und y, kann o.B.d.A. $y = 3v$ gesetzt werden.

Im Falle $n \neq 3^{2k+1}(3q+2)$, $n \neq 2\ (3)$ gilt somit $n = x^2+3z^2+9v^2$.
Da andrerseits aus $n = x^2+3y^2+9z^2$ folgt $n = x^2+(3z)^2+3y^2$ und $n \not\equiv 2\ (3)$, so sieht man, dass (1,3,9) keine Zahl $3^{2k+1}(3q+2)$, $3q+2$ darstellt.

6.5 Die Form (1,4,4) stellt jede Zahl $\neq\{4^k(8q+7),\ 4q+2,\ 4q+3\}$ dar.

Beweis. Ist $n \neq 4^k(8q+7)$, $4q+3$, so gilt nach 4.1 $n = x^2+y^2+4z^2$.

a) $n \equiv 0\ (4)$: Dann ist $x^2+y^2 \equiv 0\ (4)$, d.h. $x = 2u$, $y = 2v$.

b) $n \equiv 1\ (4)$: Dann gilt $x^2+y^2 \equiv 1\ (4)$, o.B.d.A. kann aus Symmetriegründen x ungerade, $y = 2v$ angenommen werden.

Im Falle $n \equiv \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases} (4)$ folgt somit aus $n = x^2+y^2+4z^2$: $n = x^2+4v^2+4z^2$.

Aus $n = x^2+4y^2+4z^2$ folgt andrerseits $n \not\equiv 2,3\ (4)$ und $n = x^2+(2y)^2+(2z)^2$; hieraus sieht man, dass die Form (1,4,4) die Zahlen $4^k(8q+7)$, $4q+2$, $4q+3$ nicht darstellt.

6.6 Die Form (2,4,8) stellt jede Zahl $\neq\{2q+1,\ 4^k(8q+7)\}$ dar.

Beweis. a) Ist $n = 2m \neq 4^k(8q+7)$, so wird n nach 4.6 durch (1,2,8) dargestellt. Aus $2m = x^2+2y^2+8z^2$ folgt $x = 2u$ und man erhält $2m =$

$= 2y^2+4u^2+8z^2$. Andrerseits folgt aus $2m = 2y^2+4u^2+8z^2$: $2m = (2u)^2+2y^2+8z^2$.

b) Aus $n = 2x^2+4y^2+8z^2$ folgt $n \not\equiv 1\ (2)$.

Aus a) und b) ergibt sich die Behauptung.

§ 7. Teilaussagen über die Formen (1,1,7),(1,3,5),(1,3,7), (1,2,14),(1,1,14).

7.1 Die Form (1,1,7) stellt alle Zahlen 4n, 4n+1 dar $\not\in\{7^{2k+1}(7q+e) \mid e=3,5,$

Beweis. Nach Eisenstein bilden die reduzierten Formen $f = (1,1,7)$ und $g = u^2+2v^2+4w^2-2vw$ ein Geschlecht von Formen der Determinante 7. Die Transformationen

7.1-1 $\qquad x = u \qquad y = \frac{v}{2} - 2w \qquad z = \frac{v}{2}$

7.1-2 $\qquad x = -u \qquad y = \frac{1}{2}(v+3w) \qquad z = \frac{1}{2}(v-w)$

der Determinante 1 führen f in g über.

a)

b) Da $\tilde{g} = 2v^2+4w^2-2vw \equiv 2v^2-2vw \equiv \begin{cases} 2(v^2-v^2) \equiv 0\ (4) \text{ falls } v \equiv w\ (2) \\ 0\ (4) \text{ falls } v \equiv 0\ (2),\ w \equiv 1\ (2) \\ 2\ (4) \text{ falls } v \equiv 1\ (2),\ w \equiv 0\ (2) \end{cases}$

c)

gilt, so ist

$$g \equiv \begin{cases} 0,1\ (4) \text{ in den Fällen a) und b)} \\ 2,3\ (4) \text{ im Fall c).} \end{cases}$$

Im Fall a) ist $v-w \equiv v+3w \equiv 0\ (2)$; die Transformation 7.1-2 ist somit anwendbar. Im Fall b) ist $v \equiv 0\ (2)$, die Transformation 7.1-1 ist folglich anwendbar. Im Fall c) führt keine der beiden Transformationen zu ganzzahligen Werten y,z. Nach 3.10 wird nun eine Zahl m, die keiner der Ausnahmeprogressionen angehört, entweder durch f oder durch g dargestellt. Ist $m \equiv 0,1\ (4)$, so folgt aus einer Darstellung von m durch g eine Darstellung durch f. Da f die Zahlen 3 und 6 nicht darstellt, so ist f nicht regulär.

7.2 Die Form (1,3,5) stellt alle Zahlen 4n, 4n+1, 3n dar $\not\in\{5^{2k+1}(5q+e) \mid e = 2,3\}$.

Beweis. Nach Eisenstein bilden die Formen $f = (1,3,5)$ und $g = u^2+2v^2+8w^2-2vw$ ein Geschlecht der Determinante 15, das durch die Ausnahmeprogressionen $5^{2k+1}(5q+e)$ gekennzeichnet ist. Die Transformationen

7.2-1 $\qquad x = u \qquad y = \frac{1}{2}(v-3w) \qquad z = \frac{1}{2}(v+w)$

7.2-2 $\qquad x = u \qquad y = \frac{v}{2} + w \qquad z = -\frac{v}{2} + w$

der Determinante 1 führen f in g über.

Da $\tilde{g} = 2v^2+8w^2-2vw \equiv 2v^2-2vw \equiv \tilde{g}$ (4) ist, so gilt nach 7.1

a) $g \equiv 0,1$ (4) falls $v \equiv 0$ (2) oder $v \equiv w \equiv 1$ (2)

b) $g \equiv 2,3$ (4) falls $v \equiv 1$ (2), $w \equiv 0$ (2).

Im Fall a) führt entweder die Transformation 7.2-2 ($v \equiv 0$ (2)) oder die Transformation 7.2-1 ($v \equiv w \equiv 1$ (2)) zu ganzzahligen Werten y,z. Im Fall b) ist aber keine der beiden Transformationen anwendbar.

Da es nur zwei reduzierte Formen und zwei Geschlechter der Determinante 5 gibt, so ist die Form $h = x^2+2y^2+3z^2-2yz$ die einzige reduzierte Form ihres Geschlechts; sie ist somit regulär. Die Ausnahmeprogression von h ist $5^{2k+1}(5q+e')$ ($e' = 1,4$), wie sich durch Anwendung von 3.9 auf $3h$ ergibt. Aus $n = x^2+2y^2+3z^2-2yz$ folgt $3n = 3x^2+6y^2+9z^2-6yz = (3z-y)^2+3x^2+5y^2$.

Anmerkung : Die Aussage : $(1,3,5)$ stellt jede Zahl $3n$ dar $\neq \{5^{2k+1}(5q+e)\}$ kann auch durch Transformation bewiesen werden. Die Transformation

7.2-3 $\qquad x = \frac{1}{3}(-u+v-8w) \qquad y = \frac{1}{3}(u+2v-w) \qquad z = \frac{1}{3}(u-v-w)$

der Determinante 1 führt f in g über. Nun ist $g = u^2+2v^2+8w^2-2vw \equiv u^2+2(v+w)^2$ (3) und damit gilt : $g \equiv 0,1$ (3) falls $v+w \equiv 0$ (3) und $g \equiv 2,0$ (3), falls $v+w \not\equiv 0$ (3). Ist somit die durch g dargestellte Zahl $n \equiv 0$ (3), so ist entweder $v+w \equiv 0$ (3), $u \equiv 0$ (3), folglich $-u+v+w \equiv 0$ (3) oder es ist $v+w \not\equiv 0$ (3), $u \not\equiv 0$ (3). Indem man, falls notwendig, u durch $-u$ ersetzt, kann stets $-u+v+w \equiv 0$ (3) erzielt werden. In den Fällen $n \equiv 1,2$ (3) führt die Transformation 7.2-3 zu keinen ganzzahligen Werten x,y,z.

f ist nicht regulär, da z.B. die Zahlen 2,11,22 nicht dargestellt werden.

7.3 Die Form (1,3,7) stellt alle Zahlen 4n, 4n+3, 7n $\not\in\{3^{2k+1}(3q+2)\}$ dar.

Beweis. Nach Eisenstein bilden die Formen f = (1,3,7) und $g = 2u^2+3v^2+4w^2-2uw$ ein Geschlecht der Determinante 21. das durch die Ausnahmeprogression $3^{2k+1}(3q+2)$ charakterisiert wird. Durch die Transformationen

7.3-1 $\qquad x = \frac{u}{2} - 2w \qquad y = v \qquad z = \frac{u}{2}$

7.3-2 $\qquad x = \frac{1}{2}(u+3w) \qquad y = -v \qquad z = \frac{1}{2}(u-w)$

der Determinante 1 geht f in g über. Da nun $2u^2+4w^2-2uw \equiv 2u^2-2uw \equiv \tilde{g}$ (4) ist, so ist nach 7.1 a) $\tilde{g} \equiv 0$ (4) falls $u \equiv w$ (2) oder $u \equiv 0$ (2), $w \equiv 1$ (2) und b) $\tilde{g} \equiv 2$ (4) falls $u \equiv 1$ (2), $w \equiv 0$ (2) ist. Damit ist $g \equiv 0,3$ (4) im Falle a) und $g \equiv 1,2$ (4) im Falle b). Im Fall a) führt stets eine der beiden Transformationen 7.3-1 ($u \equiv 0$ (2)) oder 7.3-2 ($u \equiv w \equiv 1$ (2)) zu ganzzahligen Werten x,z. Im Fall b) ist keine der Transformationen verwendbar.

Die Form h = (1,1,3) ist die einzige reduzierte Form ihres Geschlechts. Da $h_1 = v^2+z^2+7u^2-4uv$ demselben Geschlecht angehört, so ist h_1 äquivalent zu h. h_1 stellt somit alle Zahlen $\not\in\{3^{2k+1}(3q+2)\}$ dar. Aus $n = v^2+z^2+7u^2-4uv$ folgt $7n = 7v^2+7z^2+49u^2-28uv = (7u-2v)^2+3v^2+7z^2$.

Da (1,3,7) die Zahlen 2 und $5 \equiv 1$ (4) nicht darstellt, ist die Form nicht regulär. Auch in jeder Progression 7n+v ($1 \leq v \leq 6$) lassen sich Zahlen angeben, die durch f nicht dargestellt werden und nicht von der Form $3^{2k+1}(3q+2)$ sind.

Anmerkung : Daß f regulär ist für die Zahlen 7n lässt sich auch durch Transformationen zeigen: Die Transformationen

7.3-3 $\quad x = \frac{1}{7}(8u-3v-11w) \qquad y = \frac{1}{7}(3u+5v+2w) \qquad z = \frac{1}{7}(u-3v+3w)$

7.3-4 $\quad x = \frac{1}{7}(8u+3v+3w) \qquad y = \frac{1}{7}(3u-5v-5w) \qquad z = \frac{1}{7}(u+3v-4w)$

führen f in g über. Da nun $g = 2u^2+3v^2+4w^2-2uw \equiv 2(u+3w)^2+3v^2$ (7) gilt,

so ist $g \equiv 0\ (7)$ genau dann, wenn a) $u+3w \equiv \pm 1\ (7)$ $v \equiv \pm 2\ (7)$
b) $u+3w \equiv \pm 2\ (7)$ $v \equiv \pm 3\ (7)$
c) $u+3w \equiv \pm 3\ (7)$ $v \equiv \pm 1\ (7)$
d) $u+3w \equiv 0\ (7)$ $v \equiv 0\ (7)$ ist.

Im Fall d) ist sowohl 7.3-3 als auch 7.3-4 anwendbar. Haben die Werte $u+3w$, v gleiches Vorzeichen im Fall a) bzw. verschiedenes in den Fällen b) und c), so ist stets $u+3v+3w \equiv 0\ (7)$; gleiches Vorzeichen der Werte $u+3w$, v im Fall b) und c) bzw. verschiedenes im Fall a) hat $u+3w-3v \equiv 0\ (7)$ zur Folge. Gilt $u+3w+3v \equiv 0\ (7)$, so ist auch $u+3v-4w \equiv 0\ (7)$ und die Transformation 7.3-4 ist anwendbar. Ist $u-3v+3w \equiv 0\ (7)$, so führt 7.3-3 zu ganzzahligen Werten x,y,z.

7.4 Die Form $f = (1,2,14)$ stellt alle Zahlen $3n$, $3n+2$ dar $\notin \{ 8q+5,\ 7^{2k+1}(7q+e) \mid e = 3,5,6 \}$.

Beweis. Die Formen f und $g = (2,2,7)$ bilden ein Geschlecht der Determinante 28, das durch die Progressionen $7^{2k+1}(7q+e)$, $8q+5$ charakterisiert wird. Die Transformation $x = \frac{1}{3}(2u+7w)$ $y = v$ $z = \frac{1}{3}(-u+w)$ führt f in g über. Nun ist $g \equiv 0\ (3)$, falls $u \equiv v \equiv w \equiv 0\ (3)$ oder $v \equiv 0\ (3)$, $u^2 \equiv w^2 \equiv 1\ (3)$ gilt. Da g symmetrisch ist in u und v, konnte im zweiten Fall o.B.d.A. $v \equiv 0\ (3)$, $u \not\equiv 0\ (3)$ angenommen werden. Es ist ferner $g \equiv 2\ (3)$ für $u \equiv 0\ (3)$, $v^2 \equiv 1\ (3)$, $w \equiv 0\ (3)$ und für $u^2 \equiv v^2 \equiv w^2 \equiv 1\ (3)$. Ist somit $g \equiv 0,2\ (3)$, so kann stets $-u+w \equiv 0\ (3)$ erzielt werden. Für $g \equiv 1\ (3)$ führt die Transformation zu keinen ganzzahligen Werten x,z. Da f die Zahl $7 \equiv 1\ (3)$ nicht darstellt, ist f nicht regulär.

7.5 Die Form $(1,1,14)$ stellt jede Zahl $8n$, $8n+2$ dar $\notin \{ 7^{2k+1}(14q+e) \mid e = 5,10,12 \}$

Beweis. Nach 7.1 stellt die Form $f = (1,1,7)$ jede Zahl $4n$, $4n+1$ dar $\notin \{ 7^{2k+1}(7q+e') \mid e' = 3,5,6 \}$.

a) Aus $n = x^2+y^2+7z^2$ folgt $2n = 2x^2+2y^2+14z^2 = (x+y)^2+(x-y)^2+14z^2$.

b) Aus $2n = x^2+y^2+14z^2$ folgt $x^2+y^2 \equiv 0\ (2)$; daher gibt es ganze Zahlen u,v mit $x = u+v$, $y = u-v$. Dann ist $2n = (u+v)^2+(u-v)^2+14z^2 = 2u^2+2v^2+14z^2$. $n = u^2+v^2+7z^2$.

Somit stellt (1,1,14) genau dann eine Zahl 2n dar, wenn (1,1,7) die Zahl n darstellt. Zusammen mit 7.1 ergibt sich die Behauptung.

§ 8. Teilaussagen über die Formen (1,7,18),(2,9,14),(3,4,7), (1,5,7),(1,1,10),(1,2,20),(1,6,10),(2,12,20),(2,3,4).

8.1 Die Form f = (1,7,18) stellt jede Zahl 27n, 27n+9 dar $\notin \{ 7^{2k+1}(63q+e) \mid e = 27, 45, 54 \}$.

Beweis. a) Stellt f eine Zahl 9n dar, so folgt $x^2+7y^2 \equiv x^2+y^2 \equiv 0\ (3)$, hieraus ergibt sich x = 3u, y = 3v und $9n = 9u^2+18z^2+63v^2$; damit gilt $n = u^2+2z^2+7v^2$.

b) Umgekehrt folgt aus $n = u^2+2z^2+7v^2 : 9n = 9u^2+18z^2+63v^2 =$ $= (3u)^2+7(3v)^2+18z^2$.

Nach a) und b) stellt somit (1,7,18) genau dann eine Zahl 9n dar, wenn (1,2,7) die Zahl n darstellt. Wie G. Pall (33) zeigte, stellt aber (1,2,7) alle Zahlen 3m, 3m+1 dar $\notin \{ 7^{2k+1}(7q+e') \mid e' = 3,5,6 \}$. Hieraus folgt die Behauptung.

8.2 Die Form f = (2,9,14) stellt jede Zahl 27n, 27n+18 dar $\notin \{ 72q+45,\ 7^{2k+1}(63q+e) \mid e = 27,45,54 \}$.

Beweis. a) Stellt f eine Zahl 9n dar, so folgt aus $9n = 2x^2+9y^2+14z^2$: $2x^2+14z^2 \equiv 2x^2+2z^2 \equiv 0\ (3)$. Hieraus erhält man x = 3u, z = 3w und $n = y^2+2u^2+14w^2$.

b) Umgekehrt folgt aus $n = y^2+2u^2+14w^2 : 9n = 2(3u)^2+9y^2+14(3w)^2$.

Damit stellt f genau dann eine Zahl 9n dar, wenn (1,2,14) die Zahl n darstellt. Nach 7.4 nimmt aber (1,2,14) alle Zahlen 3n, 3n+2 an, die nicht zur Menge $\{ 8q+5,\ 7^{2k+1}(7q+e') \mid e' = 3,5,6 \}$ gehören. Daraus ergibt sich die Behauptung.

8.3 Die Form (3,4,7) stellt jede Zahl 16n, 16n+12, 28n, 4n+3 dar $\notin \{ 3^{2k+1}(3q+2) \}$.

Beweis. a) Ist $4n = 3x^2+4y^2+7z^2$, so folgt $3x^2+3z^2 \equiv 0\ (4)$, also $x = 2u$, $z = 2w$ und es wird $n = y^2+3u^2+7w^2$. Umgekehrt folgt aus $n = y^2+3u^2+7w^2$: $4n = 3(2u)^2+4y^2+7(2w)^2$. Damit stellt (3,4,7) genau dann eine Zahl $4n$ dar, wenn (1,3,7) die Zahl n darstellt. Folglich stellt nach 7.3 die Form (3,4,7) alle Zahlen $16m$, $16m+12$, $28m$ dar $\neq \{3^{2k+1}(3q+2)\}$.

b) Ist $x^2+3y^2+7z^2 \equiv 3\ (4)$, so gilt $x^2+3y^2+3z^2 \equiv 3\ (4)$.

1) $x \equiv 0\ (2)$ bedingt $y^2+z^2 \equiv 1\ (4)$, d.h. $y+z \equiv 1\ (2)$.

2) $x \equiv 1\ (2)$ bedingt $3y^2+3z^2 \equiv 2\ (4)$, dies hat $y \equiv z \equiv 1\ (2)$ zur Folge.

Indem man, falls notwendig, x durch $-x$ ersetzt, kann stets $3y \equiv x\ (4)$ erreicht werden. Da $x^2+3y^2+7z^2 = (\frac{x-3y}{2})^2+3(\frac{x+y}{2})^2+7z^2 = u^2+3v^2+7z^2$ gilt, so erhält man auch in diesem Falle eine Darstellung von $n \equiv 3\ (4)$ mit geradem $u = \frac{1}{2}(x-3y)$.

Somit kann o.B.d.A. $x = 2u_1$ angenommen werden. Dann folgt aus $n = x^2+3y^2+7z^2$: $n = 3y^2+4u_1^2+7z^2$. Da sich aus $n = 3y^2+4u_1^2+7z^2$ $n = (2u_1)^2+3y^2+7z^2$ ergibt, hat (3,4,7) für die Zahlen $4m+3$ genau die Ausnahmewerte $3^{2k+1}(3q+2)$ (unter Verwendung von 7.3).

<u>8.4</u> Die Form (1,5,7) stellt jede Zahl $7n \neq \{5^{2k+1}(5q+e) \mid e = 2,3\}$ dar.

Beweis. Die Form $g = x^2+2v^2+3w^2-2vw$ ist die einzige reduzierte ihres Geschlechts; sie stellt somit jede Zahl $\neq \{5^{2k+1}(5q+e') \mid e' = 1,4\}$ dar. Durch die Substitution $v = y+2z$, $w = z$, $x = x$ der Determinante 1 geht g in die äquivalente Form $h = x^2+2y^2+7z^2+6yz$ über. Ist somit $n \neq 5^{2k+1}(5q+e')$, so wird n durch h dargestellt. Dann ist $7n = 7x^2+14y^2+49z^2+42yz =$ $= (7z+3y)^2+5y^2+7x^2$. Dass (1,5,7) die Zahlen $5^{2k+1}(5q+e)$ auslässt, ergibt sich nach 3.9.

<u>8.5</u> Die Form (1,1,10) stellt alle Zahlen $2n \neq \{4^k(16q+6)\}$ dar.

Beweis. a) Aus $2n = x^2+y^2+10z^2$ folgt $x^2+y^2 \equiv 0\ (2)$, also $x+y = 2u$, $x-y = 2v$; damit wird $2n = (u+v)^2+(u-v)^2+10z^2 = 2u^2+2v^2+10z^2$, $n = u^2+v^2+5z^2$.

b) Umgekehrt folgt aus $n = u^2+v^2+5z^2$: $2n = 2u^2+2v^2+10z^2 =$

$= (u+v)^2+(u-v)^2+10z^2$.

Genau dann stellt somit (1,1,10) eine Zahl 2n dar, wenn (1,1,5) die Zahl n darstellt. Hieraus ergibt sich nach 3.12 die Behauptung.

8.6 Die Form (1,2,20) stellt jede Zahl $2n \notin \{16q+14,\ 5^{2k+1}(10q+e) \mid e = 2,8$ dar.

Beweis. a) Stellt (1,2,20) die Zahl 2n dar, so folgt aus $2n = x^2+2y^2+20z^2$: $x = 2u$ und $n = y^2+2u^2+10z^2$.

b) Umgekehrt folgt aus $n = y^2+2u^2+10z^2$: $2n = (2u)^2+2y^2+20z^2$.

Genau dann stellt somit (1,2,20) die Zahl 2n dar, wenn (1,2,10) die Zahl n darstellt. Nach Eisenstein's Tabelle der reduzierten ternären Formen ist (1,2,10) die einzige reduzierte ihres Geschlechts, das durch die Progressionen $5^{2k+1}(5q+e')$, $8q+7$ ($e' = 1,4$) gekennzeichnet ist. Die Form (1,2,10) ist somit regulär. Hieraus ergibt sich die Behauptung.

8.7 Die Form (1,6,10) stellt jede Zahl $5n \notin \{40q+5,\ 3^{2k+1}(15q+10)\}$ dar.

Beweis. Nach 4.5 stellt $f = 2u^2+2v^2+3w^2$ jede Zahl $\notin \{3^{2k+1}(3q+2),\ 8q+1\}$ dar.

a) Durch die Substitution $y = u+w$, $w = w$ der Determinante 1 geht f in die äquivalente Form $\tilde{f} = 2(y-w)^2+2v^2+3w^2 = 2y^2+2v^2+5w^2-4wy$ über. Ist nun $n \neq 3^{2k+1}(3q+2)$, $8q+1$, so wird n durch $\tilde{f}$ dargestellt. Aus $n = 2y^2+2v^2+5w^2-4wy$ folgt $5n = 10y^2+10v^2+25w^2-20yw = (5w-2y)^2+6y^2+10v^2$.

b) Umgekehrt folgt aus $5n = x^2+6y^2+10z^2$: $x^2+y^2 \equiv 0\ (5)$; indem man hier, falls notwendig, x durch -x ersetzt, kann stets $2y+x = 5v$ angenommen werden. Dann gilt $5n = (5v-2y)^2+6y^2+10z^2 = 10y^2+10z^2+25v^2-20vy$, $n = 2y^2+2z^2+5v^2-4vy = 2(y-v)^2+2z^2+3v^2$.

Genau dann stellt somit (1,6,10) eine Zahl 5n dar, wenn (2,2,3) die Zahl n darstellt; hieraus und aus 4.5 ergibt sich die Behauptung.

8.8 Die Form (2,12,20) stellt jede Zahl $10n \notin \{3^{2k+1}(30q+20),\ 80q+10\}$ dar.

Beweis. a) Stellt (2,12,20) eine Zahl 10n dar, so folgt aus

$10n = 2x^2+12y^2+20z^2 \;:\; 5n = x^2+6y^2+10z^2$.

b) Umgekehrt ergibt sich aus $5n = x^2+6y^2+10z^2 \;:\; 10n = 2x^2+12y^2+20z^2$.

Damit erhält man nach 8.7 die Behauptung.

8.9 Die Form (2,3,4) stellt jede gerade Zahl $\notin \{4^k(16q+10)\}$ dar.

Beweis. Aus $2n = 2x^2+3y^2+4z^2$ folgt $y = 2v$ und $n = x^2+2z^2+6v^2$. Umgekehrt erhält man aus $n = x^2+2z^2+6v^2 \;:\; 2n = 2x^2+3(2v)^2+4z^2$. Zusammen mit 5.1 ergibt sich hieraus die Behauptung.

§ 9. Weitere Teilaussagen.

9.1 Die Form (1,2,11) stellt jede Zahl $2n \notin \{4^k(16q+10)\}$ dar.

Beweis. a) Stellt (1,2,11) eine Zahl 2n dar, so folgt aus $2n = x^2+2y^2+11z^2$ die Bedingung $x^2+z^2 \equiv 0\ (2)$, also $x+z = 2u$. Damit wird $2n = (2u-z)^2+2y^2+11z^2 = 2y^2+4u^2+12z^2-4uz$, $n = y^2+2u^2+6z^2-2uz$.

b) Umgekehrt folgt aus $n = y^2+2u^2+6z^2-2uz \;:\; 2n = (2u-z)^2+2y^2+11z^2$.

Genau dann stellt somit (1,2,11) die Zahl 2n dar, wenn $h = y^2+2u^2+6z^2-2uz$ die Zahl n darstellt. Nach Eisenstein's Tabelle reduzierter ternärer Formen ist die Form h die einzige reduzierte ihres Geschlechts, das durch die Ausnahmeprogression $4^k(8q+5)$ charakterisiert wird. Hieraus ergibt sich die Behauptung.

9.2 Die Form (1,6,12) stellt jede Zahl $2n \notin \{6q+2,\ 4^k(16q+14)\}$ dar.

Beweis. Nach 5.2 stellt (1,3,6) jede Zahl $\notin \{3q+2,\ 4^k(16q+14)\}$ dar. Wird die Zahl 2n durch (1,3,6) angenommen, so folgt aus $2n = x^2+3y^2+6z^2 \;:\; x \equiv y\ (2)$.

a) Es sei $x = 2u$, dann ist $y = 2v$ und $2n = x^2+6z^2+12v^2$.

b) Gilt $x \equiv y \equiv 1\ (2)$, so kann, indem man falls notwendig x durch $-x$ ersetzt, stets $x+y = 4v$ angenommen werden. Da aber $x^2+3y^2+6z^2 = \left(\frac{x-3y}{2}\right)^2+3\left(\frac{x+y}{2}\right)^2+6z^2$ gilt, so folgt aus einer Darstellung von 2n mit $x \equiv y \equiv 1\ (2)$ stets auch eine Darstellung von 2n mit $y' = \frac{x+y}{2} = 2v$;

damit ist $2n = u^2+6z^2+12v^2$ mit $u = \frac{x-3y}{2}$.

Da umgekehrt aus $2n = x^2+6z^2+12v^2$ $2n = x^2+3(2v)^2+6z^2$ folgt, so stellt (1,6,12) jede Zahl $2n \notin \{4^k(16q+14), 6q+2\}$ dar.

9.3 Die Form (2,12,24) stellt jede Zahl $4n \notin \{12q+4, 4^k(8q+7)\}$ dar.

Beweis. Aus $2n = x^2+6y^2+12z^2$ folgt $4n = 2x^2+12y^2+24z^2$ und umgekehrt. Zusammen mit 9.2 ergibt sich hieraus die Behauptung.

9.4 Die Form (1,2,24) stellt jede Zahl 8q+3 dar.

Beweis. Nach 5.1 stellt (1,2,6) jede Zahl 8q+3 dar. Aus $n = x^2+2y^2+6z^2 \equiv 3\ (8)$ folgt $x \equiv 1\ (2)$ und damit $2y^2+6z^2 \equiv 2\ (8)$, $y^2+3z^2 \equiv 1\ (4)$; d.h. einer der beiden Werte y,z muss gerade, der andere ungerade sein. Wäre $y = 2v$, so folgte $y^2+3z^2 \equiv 3\ (4)$, folglich muss $z = 2w$ gelten, dann erhält man $n = x^2+2y^2+24w^2$.

9.5 Die Form (1,2,17) stellt jede Zahl 6n, $6n+2 \notin \{4^k(16q+14)\}$ dar.

Beweis. I.a) Stellt (1,2,17) eine Zahl 2n dar, so folgt aus $2n = x^2+2y^2+17z^2 \ : \ x^2+z^2 \equiv 0\ (2)$, es gilt also $x+z = 2u$, damit wird $2n = 4u^2+18z^2+2y^2-4uz$, $n = y^2+2u^2+9z^2-2uz$.

b) Umgekehrt folgt aus $n = y^2+2u^2+9z^2-2uz \ : \ 2n = 2y^2+4u^2+18z^2-4uz = (2u-z)^2+2y^2+17z^2$.

Genau dann stellt damit (1,2,17) eine Zahl 2n dar, wenn $f = y^2+2u^2+9z^2-2uz$ die Zahl n darstellt.

II. Nach Eisenstein bilden die Formen f und $h = (1,1,17)$ ein Geschlecht der Determinante 17, das durch die Ausnahmeprogressionen $4^k(8q+7)$ charakterisiert wird. Es gilt nun

9.5-1 $$y^2+2(\tfrac{u+8z}{3})^2+9(\tfrac{u-z}{3})^2-2(\tfrac{u+8z}{3})(\tfrac{u-z}{3}) = y^2+u^2+17z^2 = u^2+2(\tfrac{y+8z}{3})^2+9(\tfrac{y-z}{3})^2-2(\tfrac{y+8z}{3})(\tfrac{y-z}{3}) = y^2+u^2+17z^2.$$

Stellt damit $u^2+y^2+17z^2$ eine Zahl n dar mit Werten u,y,z, für die $u-z \equiv 0\ (3)$ oder $y-z \equiv 0\ (3)$ gilt, so folgt nach 9.5-1 aus einer Darstellung von n durch (1,1,17) auch eine Darstellung von n durch f.

a) Sei $u^2+y^2+17z^2 \equiv 0\ (3)$, dann ist

1) $z \equiv 0\ (3)$, $u \equiv y \equiv 0\ (3)$, also $u-z \equiv 0\ (3)$

2) $z^2 \equiv 1\ (3)$, $u^2+y^2 \equiv 1\ (3)$; eine der beiden Zahlen u,y ist somit nicht durch drei teilbar; ersetzt man diese, falls notwendig, durch ihre negative, so kann stets $u-z \equiv 0\ (3)$ bzw. $y-z \equiv 0\ (3)$ erreicht werden.

b) Sei $u^2+y^2+17z^2 \equiv 1\ (3)$, dann ist

1) $z \equiv 0\ (3)$, $u^2+y^2 \equiv 1\ (3)$, d.h. eine der beiden Zahlen u oder y ist durch drei teilbar; damit gilt $u-z \equiv 0\ (3)$ oder $y-z \equiv 0\ (3)$.

2) $z \not\equiv 0\ (3)$, $u^2+y^2 \equiv 2\ (3)$, $u^2 \equiv y^2 \equiv 1\ (3)$. Indem man, falls notwendig, u durch -u ersetzt, kann stets $u-z \equiv 0\ (3)$ erzielt werden.

Stellt somit $u^2+y^2+17z^2$ eine Zahl 3n, 3n+1 dar, so ist stets $u-z \equiv 0\ (3)$ oder $y-z \equiv 0\ (3)$. Nach 9.5-1 folgt somit stets auch eine Darstellung von 3n, 3n+1 durch f. Damit stellt f jede Zahl 3n, 3n+1 dar $\not\in\{4^k(8q+7)\}$.

Aus I. und II. ergibt sich die Behauptung.

<u>9.6</u> Die Form (1,1,11) stellt jede Zahl $4n \not\in \{11^{2k+1}(11q+e) \mid e = 2,6,7,8,10\}$ dar.

Beweis. Nach Eisenstein sind die Formen $f = (1,1,11)$ und $g = x^2+3y^2+4z^2-2yz$ die einzigen reduzierten der Determinante 11, die demselben Geschlecht angehören, das durch die Progression $11^{2k+1}(11q+e)$ charakterisiert wird. Somit wird eine Zahl n, die nicht der Ausnahmeprogression angehört, entweder durch f oder durch g dargestellt. Es gilt also entweder $n = x^2+y^2+11z^2$ oder $n = x^2+3y^2+4z^2-2yz$, dann ist aber $4n = (2x)^2+(2y)^2+11(2z)^2$ oder $4n = 4x^2+12y^2+16z^2-8yz = (2x)^2+(4z-y)^2+11y^2$. Es gibt somit stets Zahlen u,v,w, so dass $4n = u^2+v^2+11w^2$ gilt.

<u>9.7</u> Die Form (1,2,22) stellt jede Zahl 4n, 4n+1 dar $\not\in\{4^k(8q+5)\}$.

Beweis. Nach Eisenstein bilden die Formen $f = x^2+2y^2+22z^2$ und $g = u^2+6v^2+8w^2-4vw$ ein Geschlecht der Determinante 44, das durch die Ausnahmeprogression $4^k(8q+5)$ charakterisiert wird. Die Substitution

9.7-1 $\quad x = u \qquad y = \frac{v}{2} - 2w \qquad z = \frac{v}{2}$

führt f in g über. Stellt somit g eine Zahl n dar mit geradem v, so wird die Zahl n nach 9.7-1 auch durch f dargestellt. Da nun $6v^2+8w^2-4vw \equiv 2v^2 \equiv \begin{cases} 2\ (4) \text{ gilt für ungerades } v \\ 0\ (4) \text{ gilt für gerades } v \end{cases}$, so ist $g \equiv 0,1\ (4)$ für gerades v und $g \equiv 2,3\ (4)$ für ungerades v. Wird daher eine Zahl $n \equiv 0,1\ (4)$ von g angenommen, so ist v gerade. Folglich wird jede Zahl 4n, 4n+1 $\notin \{4^k(8q+5)\}$ durch f = (1,2,22) dargestellt.

9.8 Die Form (1,6,11) stellt jede Zahl $11n \notin \{4^k(176q+110)\}$ dar.

Beweis. Nach 5.8 stellt die Form $f = x^2+2y^2+3z^2$ jeden Wert $\notin \{4^k(16q+10)\}$ dar.

a) Durch die Substitution y = v+2z der Determinante 1 geht f in die äquivalente Form $g = x^2+2(v+2z)^2+3z^2 = x^2+2v^2+11z^2+8vz$ über. Ist nun $n \neq 4^k(16q+10)$, so wird n durch f und damit auch durch g dargestellt. Aus $n = x^2+2v^2+11z^2+8vz$ folgt $11n = 11x^2+22v^2+121z^2+88vz =$ $= (11z+4v)^2+6v^2+11x^2$.

b) Stellt umgekehrt die Form $x^2+6y^2+11z^2$ eine Zahl 11n dar, so ist $x^2+6y^2 \equiv 0\ (11)$. Indem man, falls notwendig, y durch -y ersetzt, kann stets $x-4y \equiv 0\ (11)$ angenommen werden. Mit x = 11u+4y ergibt sich $11n = x^2+6y^2+11z^2 = 121u^2+88uy+16y^2+6y^2+11z^2 = 11z^2+22y^2+121u^2+88uy$. Damit wird $n = z^2+2y^2+11u^2+8uy = z^2+2(y+2u)^2+3u^2$.

Genau dann stellt somit (1,6,11) eine Zahl 11n dar, wenn n durch (1,2,3) dargestellt wird. Hieraus und aus 5.8 folgt die Behauptung.

9.9 Die Form (2,12,22) stellt jede Zahl $22n \notin \{4^k(88q+55) \mid k > 0\}$ dar.

Beweis. Aus $m = x^2+6y^2+11z^2$ folgt $2m = 2x^2+12y^2+22z^2$ und umgekehrt. Daraus ergibt sich zusammen mit 9.8 die Behauptung.

9.10 Die Form (2a,2b,2c) stellt genau dann eine Zahl 2n dar, wenn (a,b,c) die Zahl n darstellt. Zahlen 2n+1 werden von (2a,2b,2c) nicht angenommen.

Beweis. Aus $2n = 2ax^2+2by^2+2cz^2$ folgt $n = ax^2+by^2+cz^2$ und umgekehrt. Ferner ist $2ax^2+2by^2+2cz^2 \not\equiv 1\ (2)$.

Anmerkung: Aussagen über die Formen (2,2,2),(2,2,4),(2,2,6),(2,4,4), (2,4,10) erhält man nach 9.10 mit Hilfe der Formen (1,1,1),(1,1,2),(1,1,3), (1,2,2),(1,2,5), deren Ausnahmeprogressionen in 3.12 angegeben wurden. Die Formen (1,2,3) bzw. (1,2,6) wurden in 5.8 bzw. 5.1 untersucht, daraus erhält man Ergebnisse für (2,4,6) bzw. (2,4,12).

III. FASTUNIVERSELLE FORMEN MIT GENAU ZWEI AUSNAHMEWERTEN.

§ 10. Notwendige Bedingungen für $F = ax^2+by^2+cz^2+dt^2$.

10.1 Im folgenden werden nun positiv definite quaternäre quadratische Formen $F = ax^2+by^2+cz^2+dt^2$ untersucht. Dabei wird vorausgesetzt, dass die Normierung so gewählt ist, dass $a \leq b \leq c \leq d$ gilt. Für F wird kurz (a,b,c,d) geschrieben.

10.2 Ramanujan (37) und Dickson (4) fanden, dass es genau 54 universelle Formen (a,b,c,d) gibt. 1938 untersuchte Halmos (18) die Formen, die alle Zahlen ausser einer darstellen. Er fand, es gibt genau 88 Formen mit einem Ausnahmewert. Dabei übersah er allerdings, dass die Formen (1,1,2,22) und (1,2,4,22) ausser 14 auch noch die Zahl 78 auslassen, so dass es insgesamt 86 Formen mit genau einem Ausnahmewert gibt. Es liegt nun nahe, diese Fragestellung weiter zu verallgemeinern und nach den Formen zu fragen, die alle Zahlen ausser zwei bzw. drei Werten darstellen. Diese Untersuchungen sollen in diesem bzw. im nächsten Abschnitt durchgeführt werden.

10.3 Im folgenden sollen die Formen F = (a,b,c,d) bestimmt werden, die genau zwei Ausnahmewerte haben. Dazu wird zunächst festgestellt, welche Formen F möglicherweise zwei Ausnahmewerte besitzen können:

Aus den Ausnahmewerten der ternären Teilform f = (a,b,c) lassen sich Bedingungen für d gewinnen. Dies sei an zwei Beispielen vorgeführt:

Die Form $x^2+y^2+z^2$ stellt alle Zahlen $\neq\{4^k(8q+7)\}$ dar. Ist somit $d > 23$, so hat F die drei Ausnahmewerte 7,15,23; folglich muss $d \leq 23$ sein. Die Formen F mit $1 \leq d \leq 7$ sind nach Ramanujan universell, ist $d = 9,10,12,14,15$, so hat F nach Halmos genau einen Ausnahmewert. Es sind somit noch zu untersuchen die Formen F mit $d = 8,11,13, 16 \leq d \leq 23$. Diese Formen lassen sicher zwei Zahlen aus: Der Wert 7 wird für kein d

angenommen und für d = 8, d > 15 ist auch 15 Ausnahmewert. Für d = 11, 13 werden die Zahlen 39 bzw. 28 nicht angenommen.

$x^2+y^2+2z^2$ stellt alle Zahlen $\neq\{4^k(16q+14)\}$ dar. Für $d \leq 14$ ist F universell, für d = 15, 17 ≤ d ≤ 21, d = 23,24,25,27,28,29,30 hat F genau einen Ausnahmewert; ist aber d > 46, so werden die Zahlen 14,30,46 nicht dargestellt. Zu untersuchen sind somit noch die Formen F mit d = 16,22,26,31 ≤ d ≤ 46, von denen jede zwei Ausnahmewerte besitzt.

10.4 In der folgenden Tabelle ist die Ermittlung der zulässigen Werte d für F = (a,b,c,d) zusammengestellt (AW bedeutet Ausnahmewert).

a b c	kleinste AW von f	univers. Formen	Formen m. 1 AW	notw. Bed. für d	kleinste AW von F	Anzahl
1 1 1	7 15 23	1 ≤ d ≤ 7	9 10 12 14 15	8 11 13 16 ≤ d ≤ 23	7 15 7 39 7 28 7 15	11
1 1 2	14 30 46	2 ≤ d ≤ 14	15 17 18 19 20 21 23 24 25 27 28 29 30	16 22 26 31 ≤ d ≤ 46	14 30 14 78 14 56 14 30	19
1 1 3	6 15 24	3 ≤ d ≤ 6	7 8 10 11 13 14 15	9 12 16 ≤ d ≤ 24	6 15 6 54 6 15	11
1 1 4	3 7 11	-	5 6	4 7 8 ≤ d ≤ 11	3 7 3 35 3 7	6
1 1 5	3 11 12	-	5 6 10 11	7 8 9 12	3 19 3 11 3 12 3 11	4
1 1 6	3 12 21	-	7 8 10 11	6 9 12 13 ≤ d ≤ 21	3 27 3 12 3 39 3 12	12
1 1 7	3 6 14	-	-	7 ≤ d ≤ 14	3 6	8
1 1 ≥8	3 6 7	-	-	-	- -	-

a	b	c	kleinste AW von f	univers. Formen	Formen m. 1 AW	notw. Bed. für d	kleinste AW von F	An-zahl
1	2	2	7 15 23	2 ≦ d ≦ 7	9 10 12 14 15	8	7 15	
						11	7 39	
						13	7 28	
						16 ≦ d ≦ 23	7 15	11
1	2	3	10 26 40	3 ≦ d ≦ 10	11 12 13 15 17 19 20 21 22 23 24 25 26	14	10 40	
						16	10 26	
						18	10 58	
						27 ≦ d ≦ 40	10 26	17
1	2	4	14 30 46	4 ≦ d ≦ 14	15 17 18 19 20 21 23 24 25 27 28 29 30	16	14 30	
						22	14 78	
						26	14 56	
						31 ≦ d ≦ 46	14 30	19
1	2	5	10 15 35	6 ≦ d ≦ 10	5 11 12 13 14	15	10 250	
						16 ≦ d ≦ 35	10 15	21
1	2	6	5 13 20	-	6 10 11 12 13	7	5 20	
						8	5 13	
						9	5 29	
						14 ≦ d ≦ 20	5 13	10
1	2	7	5 14 20	-	8 10 11 12 13	7	5 21	
						9	5 14	
						14	5 35	
						15 ≦ d ≦ 20	5 14	9
1	2	8	5 7 13	-	-	8 ≦ d ≦ 13	5 7	6
1	2	9	5 7 14	-	-	9 ≦ d ≦ 14	5 7	6
1	2	10	5 7 15	-	-	10 ≦ d ≦ 15	5 7	6
1	2	≧11	5 7 10	-	-	-	- -	-
1	3	3	2 5 8	-	5	3	2 5	
						4	2 18	
						6 ≦ d ≦ 8	2 5	5
1	3	4	2 6 10	-	-	4	2 6	
						5	2 15	
						6	2 30	
						7 ≦ d ≦ 10	2 6	7
1	3	5	2 10 11	-	6	5	2 15	
						7	2 22	
						8	2 10	
						9	2 11	
						10	2 50	
						11	2 10	6

a b c	kleinste AW von f	univers. Formen	Formen m. 1 AW	notw. Bed. für d	kleinste AW von F	Anzahl
1 3 6	2 5 8	-	-	6 ≤ d ≤ 8	2 5	3
1 3 ≥7	2 5 6	-	-	-	- -	-
1 4 4	2 3 6	-	-	4 5 6	2 3	3
1 4 5	2 3 7	-	-	5 6 7	2 3	3
1 4 6	2 3 12	-	-	6 ≤ d ≤ 12	2 3	7
1 4 ≥7	2 3 6	-	-	-	- -	-
1 5 5	2 3 7	-	-	5 6 7	2 3	3
1 5 6	2 3 8	-	-	6 7 8	2 3	3
1 5 7	2 3 10	-	-	7 ≤ d ≤ 10	2 3	4
1 5 ≥8	2 3 7	-	-	-	- -	-
1 ≥6 ≥6	2 3 5	-	-	-	- -	-
2 2 2	1 3 5	-	-	2 3 4 5	1 3 1 17 1 3	4
2 2 3	1 6 9	-	4	3 5 6 7 8 9	1 9 1 6 1 15 1 6	6
2 2 4	1 3 5	-	-	4 5	1 3	2
2 2 5	1 3 6	-	-	5 6	1 3	2
2 2 ≥6	1 3 5	-	-	-	- -	-
2 3 3	1 4 7	-	-	3 4 5 6 7	1 4 1 13 1 4	5
2 3 4	1 10 13	-	5 8	4 6 7 9 10 11 12 13	1 17 1 23 1 17 1 10 1 23 1 10	8
2 3 5	1 4 6	-	-	5 6	1 4	2
2 3 6	1 4 7	-	-	6 7	1 4	2
2 3 ≥7	1 4 6	-	-	-	- -	-

a b c	kleinste AW von f	univers. Formen	Formen m. 1 AW	notw. Bed. für d	kleinste AW von F	Anzahl
2 4 4	1 3 5	-	-	4 5	1 3	2
2 4 5	1 3 10	-	-	5 ≤ d ≤ 10	1 3	6
2 4 ≥6	1 3 5	-	-	-	- -	-
2 ≥5 ≥5	1 3 4	-	-	-	- -	-
3 3 3	1 2 4	-	-	3 4	1 2	2
3 3 4	1 2 5	-	-	4 5	1 2	2
3 3 ≥5	1 2 4	-	-	-	- -	-
3 4 4	1 2 5	-	-	4 5	1 2	2
3 4 5	1 2 6	-	-	5 6	1 2	2
3 4 ≥6	1 2 5	-	-	-	- -	-
3 ≥5 ≥5	1 2 4	-	-	-	- -	-
≥4 ≥4 ≥4	1 2 3	-	-	-	- -	-

Damit sind nur noch die oben aufgeführten 267 Formen F möglich, um alle Zahlen ausser zweien darzustellen.

10.5 Aus diesen 267 Formen (a,b,c,d) lassen sich nun wieder 140 Formen ausscheiden, indem man von ihnen einen dritten Ausnahmewert aufzeigt. Diese Werte sind in folgender Tabelle zusammengestellt (AW bedeutet wieder Ausnahmewert):

a b c d	3.AW	a b c d	3.AW	a b c d	3.AW
1 1 1 8	23	1 1 3 9	24	1 1 4 9	28
16	23	12	486	11	39
19	47	18	24		
21	28	21	54	1 1 5 8	19
		24	78		
1 1 2 16	46			1 1 6 6	243
32	46	1 1 4 4	11	9	21
38	94	8	11	15	27
42	56			18	21
				21	48

a	b	c	d	3.AW
1	1	7	7	21
			8	14
			9	31
			10	31
			11	14
			12	31
			13	19
			14	35
1	2	2	8	23
			16	23
			19	47
			21	28
1	2	3	16	42
			30	40
			32	42
			34	74
1	2	4	16	46
			32	46
			38	94
			42	56
1	2	5	15	6 250
			20	35
			25	35
			30	40
			35	250
1	2	6	8	21
			15	20
			16	21
			17	37
1	2	7	7	42
			14	245
			15	20
			16	21
1	2	8	8	13
			10	15
			11	39
			13	28
1	2	9	9	14
			12	35
1	2	10	10	15
			11	31

a	b	c	d	3.AW
1	2	10	13	20
			14	45
			15	20
1	3	3	3	8
			4	162
			6	8
			7	18
			8	26
1	3	4	4	10
			5	38
			7	22
			8	10
			9	15
			10	24
1	3	5	5	55
			9	74
			10	1 250
			11	22
1	3	6	6	8
			7	30
			8	46
1	4	4	4	6
			5	7
			6	34
1	4	5	5	7
			7	19
1	4	6	6	18
			9	12
			10	12
			12	30
1	5	5	5	7
			6	8
			7	15
1	5	6	6	8
1	5	7	7	10
			8	10
			9	19
			10	50
2	2	2	2	5

a	b	c	d	3.AW
2	2	2	4	5
			5	14
2	2	3	3	81
			7	24
			8	9
			9	15
2	2	4	4	5
			5	33
2	2	5	5	6
			6	12
2	3	3	3	7
			5	9
			6	7
			7	16
2	3	4	9	26
			12	13
			13	23
2	3	5	5	6
			6	15
2	3	6	6	7
			7	22
2	4	4	4	5
			5	14
2	4	5	5	15
			6	25
			7	10
			8	33
			9	10
			10	25
3	3	3	3	4
			4	5
3	3	4	4	5
			5	13
3	4	4	4	5
			5	6
3	4	5	5	6
			6	35

10.6. Nach 10.4 und 10.5 sind also noch folgende 127 Formen zu untersuchen:

	a	b	c	d
10.6-1	1	1	1	11 13 17 18 20 22 23
10.6-2	1	1	2	22 26 31 33 34 35 36 37 39 40 41 43 44 45 46
10.6-3	1	1	3	16 17 19 20 22 23
10.6-4	1	1	4	7 10
10.6-5	1	1	5	7 9 12
10.6-6	1	1	6	12 13 14 16 17 19 20
10.6-7	1	2	2	11 13 17 18 20 22 23
10.6-8	1	2	3	14 18 27 28 29 31 33 35 36 37 38 39 40
10.6-9	1	2	4	22 26 31 33 34 35 36 37 39 40 41 43 44 45 46
10.6-10	1	2	5	16 17 18 19 21 22 23 24 26 27 28 29 31 32 33
10.6-11	1	2	6	7 9 14 18 19 20
10.6-12	1	2	7	9 17 18 19 20
10.6-13	1	2	8	9 12
10.6-14	1	2	9	10 11 13 14
10.6-15	1	2	10	12
10.6-16	1	3	4	6
10.6-17	1	3	5	7 8
10.6-18	1	4	5	6
10.6-19	1	4	6	7 8 11
10.6-20	1	5	6	7 8
10.6-21	2	2	2	3
10.6-22	2	2	3	5 6
10.6-23	2	3	3	4
10.6-24	2	3	4	4 6 7 10 11

§ 11. Die Formen 10.6-1,...,10.6-6.

11.1 Mit N werde im folgenden die Menge der Zahlen m bezeichnet, die den Ausnahmeprogressionen der betreffenden ternären Teilform f von F angehören.

11.2 Die Formen F aus 10.6-1 haben genau zwei Ausnahmewerte.

Beweis. Die Teilform $f = x^2+y^2+z^2$ stellt alle Zahlen $\notin N = \{4^k(8q+7)\}$ dar. Zu untersuchen sind somit nur noch die Werte $m \in N$.

a) $d = 17,18,22$: Für jedes $m \in N$, für das $k \geq 1$ ist, erhält man mit $t = 2^{k-1}$: $m_1 = m - d(2^{k-1})^2 = 4^k(8q+7) - d.4^{k-1} = 4^{k-1}(32q+28-d)$. Da $32q+28-d \not\equiv 0\ (4)$ und $\not\equiv 7(8)$ ist, so gehört m_1 nicht zur Ausnahmeprogression N; da ferner $m_1 > 0$ ist, so wird m_1 durch f dargestellt.

b) $d = 20$: Wählt man $t = 2^{k-1}$, so ergibt sich für jedes $m \in N$ mit $k \geq 1$

$0 < m_2 = 4^k(8q+7) - 20.4^{k-1} = 4^k(8q+2) \notin N$.

Die Formen (1,1,1,d) (d = 17,18,20,22) stellen somit alle Zahlen $\notin \{8q+7\}$ dar. Für die Werte 8q+7 mit $q \geq 2$ erhält man bei d = 17,18,20,22 und t = 1 : $m_3 = 8q+7-d = 8(q-2)+r$ wobei $r \neq 0$ (4) und $r \neq 7$ (8) gilt. Da $m_3 \geq 0$ ist, so wird m_3 von f angenommen.

Damit stellt (1,1,1,d) (d = 17,18,20,22) jede Zahl $\neq 7,15$ dar.

c) d = 11 : Für alle $m \in N$ mit $q \geq 1$ folgt mit $t = 2^k$ $0 < m_1 = 4^k(8q+7) - 11.4^k = 4^k(8(q-1)+4) = 4^{k+1}(2(q-1)+1)$; ist somit $q \neq 0$ (4), so gehört m_1 nicht zur Ausnahmeprogression. Gilt aber $q \equiv 0$ (4) und $q \geq 8$, so ergibt sich mit $t = 2.2^k$: $0 < m_2 = 4^k(8q+7) - 11.4.4^k = 4^k(8(q-5)+3) \notin N$, so dass also noch die Fälle q = 0 und q = 4 zu untersuchen sind. Hier gilt aber für $k \geq 1$, wenn $t = 2^{k-1}$ gewählt wird, $0 < m_3 = 4^k(8q+7) - 11.4^{k-1} = 4^{k-1}(8(4q+2)+1) \notin N$. Somit stellt (1,1,1,11) alle Zahlen $\neq 7,39$ dar.

d) d = 13 : Für diejenigen $m \in N$ mit $k \geq 2$ erhält man mit $t = 2^{k-2}$ $0 < m_1 = 4^k(8q+7) - 13.4^{k-2} = 4^{k-2}(8(16q+12)+3) \notin N$. Jede Zahl $\notin \{8q+7, 32q+28\}$ wird somit von (1,1,1,13) angenommen. Wählt man t = 1, so ergibt sich für $q \geq 1$: $0 < m_2 = 8q+7-13 = 8(q-1)+2 \notin N$ und für t = 2 erhält man, falls $q \geq 1$ ist, $0 < m_3 = 32q+28 - 13.2^2 = 32(q-1)+8 = 4(8(q-1)+2) \notin N$; die Zahlen m_2 und m_3 werden somit durch f dargestellt. Die Form (1,1,1,13) hat also nur die Ausnahmezahlen 7 und 28.

e) d = 23 : Betrachtet man die Werte $m \in N$ mit $q \geq 2$ und wählt man $t = 2^k$, so wird $0 \leq m_1 = 4^k(8q+7) - 23.4^k = 4^k(8(q-2)) = 4^{k+1}(2(q-2))$ von f angenommen, falls $q \neq 2 + 4^{k'}(16q'+14)$ ist. In diesem Falle ist aber q-11 positiv und man erhält mit $t = 2.2^k$: $0 < m_2 = 4^k(8q+7) - 23.4.4^k = 4^k(8(q-11)+3) \notin N$. Zu untersuchen sind somit noch die Zahlen $4^k(8q+7)$ mit q = 0,1. Ist dabei $k \geq 1$, so wird mit $t = 2^{k-1}$ $0 < m_3 = 4^k(8q+7) - 23.4^{k-1} = 4^{k-1}(8(4q)+5)$ durch f dargestellt. Die Form (1,1,1,23) lässt daher nur die Werte 7,15 aus.

11.3 Die Formen aus 10.6-2 haben genau zwei Ausnahmewerte.

Beweis. Die Form f = (1,1,2) stellt alle Zahlen $\notin N = \{4^k(16q+14)\}$ dar.

a) Wählt man $t = 2^k$, so wird $m_1 = 4^k(16q+14) - d.4^k = 4^k(16q+14-d)$ durch f dargestellt, falls $d \not\equiv 0\ (16)$, $d \not\equiv 2\ (4)$, sowie $16q+14-d \geq 0$ ist.

b) Mit $t = 2^{k-1}$ erhält man für $d \not\equiv 0\ (64)$, $d \not\equiv 8\ (16)$, $d \not\equiv 10\ (16)$, $k \geq 1$ die Zahl $m_2 = 4^k(16q+14) - d.4^{k-1} = 4^{k-1}(64q+56-d)$, die durch f dargestellt wird.

c) Für $t = 2^{k-2}$ wird $4^k(16q+14) - d.4^{k-2} = 4^{k-2}(16(16q+14)-d)$ durch f angenommen, falls $d \not\equiv 2\ (16)$, $d \not\equiv 0\ (4)$ und $k \geq 2$ ist.

Aus a) und b) ergibt sich, dass die Formen (1,1,2,d) mit d = 31,33,35, 36,37,39,41,43,44,45 nur die Ausnahmewerte 14,30 besitzen.

d) Für d = 22 und $q \not\equiv 0\ (4)$ ist $4^k(16q+14) - 22.4^k = 4^k(16(q-1)+8) =$ $= 4^{k+1}(4(q-1)+2) \notin N$. Im Falle $q \equiv 0\ (4)$ und $q \geq 8$ ist aber $4^k(16q+14) - 22.4.4^k = 4^k(16(q-5)+6)$ durch f darstellbar. Zu betrachten sind noch die Werte $4^k(16q+14)$ mit q = 0,4. Nach b) stellt aber f die Zahlen $4^k(16q+14) - 22.4^{k-1}$ für $k \geq 1$ dar. Damit hat (1,1,2,22) nur die Ausnahmewerte 14,78.

e) Ist d = 26, so wird $4^k(16q+14) - 26.4^k = 4^k(16(q-1)+4) =$ $= 4^{k+1}(4(q-1)+1)$ für $q > 0$ von f angenommen. Nach c) stellt f die Zahlen $4^k.14 - 26.4^{k-2}$ dar für $k \geq 2$. Die einzigen Ausnahmewerte von (1,1,2,26) sind somit 14,56.

f) Für d = 34 ist $4^k(16q+14) - 34.4^k = 4^k(16(q-2)+12) = 4^{k+1}(4(q-2)+3)$ durch f darstellbar, falls $q \not\equiv 0,1$ ist. Für diese beiden Werte von q erhält man aber nach b) die einzigen Ausnahmewerte von (1,1,2,34) : 14,30.

g) Nach a) sind für d = 40 nur noch die Zahlen $4^k(16q+14)$ mit q = 0,1 zu betrachten. Da $4^k(16q+14) - 40.4^{k-1} = 4^k(16q+4) = 4^{k+1}(4q+1)$ für $k \geq 1$ durch f dargestellt wird, so nimmt (1,1,2,40) alle Zahlen $\neq 14,30$ an.

h) Ist d = 46 und $q \geq 2$, so ist $4^k(16q+14) - 46.4^k = 4^{k+2}(q-2) \notin N$, falls $q \neq 2 + 4^{k'}(16q'+14) = \bar{q}$ ist. Für $q = \bar{q}$ ist aber $4^k(16q+14) - 46.4.4^k = 4^k(16(q-11)+6) \notin N$. Für die Zahlen $4^k(16q+14)(q = 0,1)$

mit $k \geq 1$ wird $4^k(16q+14) - 46.4^{k-1}$ nach b) durch f angenommen, so dass (1,1,2,46) nur die Zahlen 14,30 auslässt.

11.4 Die Formen aus 10.6-3 haben genau zwei Ausnahmewerte.

Beweis. Die Form f = (1,1,3) stellt alle Zahlen $\notin N = \{3^{2k+1}(3q+2)\}$ dar. Setzt man t = 1, so gilt $m = 3^{2k+1}(3q+2) - d \not\equiv 0 \ (3)$, da keiner der Werte d durch drei teilbar ist. Ist somit $m \geq 0$, so wird m durch f dargestellt. Die Zahlen $3^{2k+1}(3q+2) < d$; d.h. die Werte 6,15, sind somit die einzigen Ausnahmewerte von (1,1,3,d).

11.5 Die Formen 10.6-4 haben genau zwei Ausnahmewerte.

Beweis. Nach 4.1 stellt f = (1,1,4) alle Zahlen $\notin N = \{4^k(8q+7),\ 4q+3\}$ dar.

a) d = 7.

1) Darstellung der Zahlen 4q+3 : Wählt man t = 1, so erhält man $m_1 = 4q+3-7 = 4(q-1)$ und m_1 wird durch f dargestellt, falls $q \geq 1$ und $q \neq 1 + 4^{k'}(8q'+7)$ gilt. Wählt man t = 3, so ergibt sich $4q+3 - 7.9 = 4(q-15)$ und diese Zahl wird für $q \geq 15$ und $q \neq 15 + 4^{k''}(8q''+7)$ durch f angenommen. Angenommen, es sei $1 + 4^{k'}(8q'+7) = 15 + 4^{k''}(8q''+7)$, dann gilt

11.5-1 $\quad 4^{k'}(8q'+7) - 4^{k''}(8q''+7) = 14.$

A) Ist k' = 0, so folgt aus 11.5-1 auch k'' = 0 und es ergibt sich der Widerspruch 8q' - 8q'' = 14.

B) Aus k' > 0 folgt k''> 0, dann ist aber die linke Seite in 11.5-1 durch vier teilbar, die rechte dagegen nicht.

Somit ist für $q \geq 15$ eine der Zahlen 4(q-1) bzw. 4(q-15) durch f darstellbar. Zu untersuchen sind noch die Werte $4q+3 < 7$ und, für q = 8, 4q+3. Dies ergibt die Zahlen 3 und 35, die beide durch (1,1,4,7) nicht dargestellt werden.

2) Für die Darstellung der Zahlen $4^k(8q+7)$ (k > 0) wähle man $t = 2^{k-1}$, dann erhält man $4^k(8q+7) - 7.4^{k-1} = 4^{k-1}(8(4q+2)+5) \notin N$.

b) d = 10.

1) Es sei m = 4q+3. Wählt man t = 1, so ergibt sich $m_1 = 4q+3-10 = 4(q-2)+1$. Ist $m_1 \geq 0$, so wird m_1 durch f angenommen. Für q = 0,1 ergeben sich die Werte 3 und 7, die beide von (1,1,4,10) ausgelassen werden.
2) Für die Zahlen $4^k(8q+7)$ (k > 0) kann mit $t = 2^{k-1}\, 4^k(8q+7) - 10.4^{k-1} = 4^{k-1}\,(8(4q+2)+2) \notin N$ erreicht werden.

11.6 Die Formen aus 10.6-5 haben genau zwei Ausnahmewerte.

Beweis. Die Form f = (1,1,5) stellt alle Zahlen $\notin N = \{4^k(8q+3)\}$ dar.

a) Wählt man $t = 2^k$, so wird $m_1 = 4^k(8q+3) - d.4^k = 4^k(8q+3-d)$ durch f dargestellt, falls $m_1 \geq 0$ und $d \not\equiv 0\ (8)$, $d \not\equiv 3\ (4)$ ist.

b) Für $t = 2^{k-1}$ ergibt sich $4^k(8q+3) - d.4^{k-1} = 4^{k-1}(32q+12-d) \notin N$ für $d \not\equiv 1\ (8)$, $d \not\equiv 0\ (32)$, $d \not\equiv 12\ (16)$ und k > 0.

c) Ist d = 7, so sind nach b) noch die Zahlen 8q+3 zu untersuchen. Der Wert $m_2 = 8q+3-7 = 8(q-1)+4 = 4(2(q-1)+1)$ wird für $q \geq 1$, $q \not\equiv 2\ (4)$ durch f angenommen. Mit t = 2 wird für $q \equiv 2\ (4)$, $q \geq 6$ die Zahl $8q+3-28 = 8(q-4)+7$ durch f dargestellt. Damit stellt (1,1,5,7) alle Zahlen $\not\equiv 3,19$ dar.

d) Für d = 9 sind nach a) noch die Werte 3.4^k zu untersuchen. Ist $k \geq 2$, so wird $3.4^k - 9.4^{k-2} = 4^{k-2} = 4^{k-2}(8.4+7)$ durch f dargestellt. Die einzigen Ausnahmewerte von (1,1,5,9) sind somit 3 und 12.

e) Für d = 12 sind nach a) die Zahlen 3.4^k und 11.4^k zu untersuchen. Ist k > 0, so werden die Werte $3.4^k - 12.4^{k-1} = 0$ und $11.4^k - 12.4^{k-1} = 4^k.8 = 2.4^{k+1}$ von f angenommen; so dass (1,1,5,12) die einzigen Ausnahmewerte 3 und 11 besitzt.

11.7 Die Formen 10.6-6 haben genau zwei Ausnahmewerte.

Beweis. Die Form f = (1,1,6) stellt alle Zahlen $\notin N = \{3^{2k+1}(3q+1)\}$ dar.

a) Ist $d \not\equiv 0\ (3)$ und wählt man t = 1, so ist $m = 3^{2k+1}(3q+1) - d \notin N$; die Zahlen $m \geq 0$ werden somit durch f dargestellt. Die Formen (1,1,6,d) mit d = 13,14,16,17,19,20 stellen daher alle Zahlen $\not\equiv 3,12$ dar.

b) $d = 12$. Für $k > 0$ wird $3^{2k+1}(3q+1) - 12.3^{2k-2} = 3^{2k-1}(3(9q+1)+2)$ von f dargestellt, so dass nur noch die Zahlen $3(3q+1)$ zu untersuchen sind. Der Wert $3(3q+1) - 12 = 3^2(q-1)$ wird von f angenommen, falls $q \geq 1$ und $q \neq 1 + 3^{2k'+1}(3q'+1) = \bar{q}$ gilt. Wählt man für $q = \bar{q}$ und $q > 4$ den Wert $t = 2$, so ist $3(3q+1) - 12.4 = 3^2(q-5) \notin N$, da $q-5 \not\equiv 0\ (3)$ ist. Zu betrachten sind daher nur noch für $q = 0,4$ die Zahlen $3(3q+1)$, diese sind aber schon als Ausnahmewerte von (1,1,6,12) bekannt.

§ 12. Die Formen 10.6-7,...,10.6-11.

12.1 Die Formen aus 10.6-7 haben genau zwei Ausnahmewerte.

Beweis. Die Form (1,2,2) hat genau dieselben Ausnahmezahlen $4^k(8q+7)$ wie (1,1,1). Da auch die zu untersuchenden Werte d dieselben sind wie in 10.6-1, so lässt sich der in 11.2 gegebene Beweis mühelos auf 12.1 übertragen.

12.2 Die Formen aus 10.6-8 haben genau zwei Ausnahmewerte.

Beweis. Die Form $f = (1,2,3)$ stellt nach 5.8 alle Zahlen $\notin N = \{4^k(16q+10)\}$ dar.

a) Setzt man $t = 2^k$, so wird $4^k(16q+10) - d.4^k = 4^k(16q+10-d)$ durch f dargestellt, falls $16q+10-d \geq 0$, $d \not\equiv 0\ (16)$, $d \not\equiv 2\ (8)$ gilt.

b) Für $t = 2^{k-1}$ erhält man $m = 4^k(16q+10) - d.4^{k-1} = 4^{k-1}(64q+40-d)$; ist dabei $d \not\equiv 14\ (16)$, $d \not\equiv 0\ (64)$, $d \not\equiv 8\ (16)$ und $k \geq 1$, so wird m von f angenommen.

Aus a) und b) folgt: Die Formen (1,2,3,d) mit $d = 27,28,29,31,33,35,36,37,38,39$ haben nur die Ausnahmewerte 10,26.

c) Für $d = 14$ sind nach a) noch die Zahlen $4^k.10$ zu untersuchen. Setzt man $t = 2^{k-2}$ ($k \geq 2$), so wird $4^k.10 - 14.4^{k-2} = 4^{k-2}(16.9+2)$ durch f dargestellt, so dass (1,2,3,14) alle Werte $\neq 10,40$ annimmt.

d) Für $d = 18$ sind nach b) nur noch die Zahlen $16q+10$ zu untersuchen.

Wählt man $t = 1$, so ist $16q+10-18 = 16(q-1)+8 = 4(4(q-1)+2) \notin N$ für $q \geq 1$ und $q \not\equiv 3\ (4)$. Im Falle $q \equiv 3\ (4)$, $q \geq 7$ ergibt sich mit $t = 2$ $16q+10 - 18.2^2 = 16(q-4)+2 \notin N$. $(1,2,3,18)$ stellt somit alle Zahlen $\not\equiv 10,58$ dar.

e) $d = 40$ erfordert nach a) noch die Untersuchung der Zahlen $4^k.10$ und $4^k.26$. Ist bei diesen Werten $k \geq 1$, so kann $t = 2^{k-1}$ gewählt werden; die Zahlen $4^k.10 - 40.4^{k-1} = 0$ und $4^k.26 - 40.4^{k-1} = 4^k.16 = 4^{k+2}$ werden von f angenommen, so dass $(1,2,3,40)$ nur 10,26 auslässt.

12.3 Die Formen aus 10.6-9 haben genau zwei Ausnahmewerte.

Beweis. Die Form $(1,2,4)$ hat dieselben Ausnahmewerte $4^k(16q+14)$ wie $(1,1,2)$. Da auch dieselben Werte d auftreten wie in 10.6-2, so kann der in 11.3 gegebene Beweis auf die Formen 10.6-9 übertragen werden.

12.4 Die Formen aus 10.6-10 haben genau zwei Ausnahmewerte.

Beweis. Die Form $f = (1,2,5)$ stellt alle Zahlen $\notin N = \{5^{2k+1}(5q+e) \mid e = 2,3\}$ dar. Wählt man $t = 1$, so ist $m = 5^{2k+1}(5q+e) - d \notin N$, da nur Werte $d \not\equiv 0\ (5)$ auftreten. Die Zahlen $m \geq 0$ werden daher von f angenommen. Die Formen $(1,2,5,d)$ besitzen somit nur die Ausnahmewerte 10,15.

12.5 Die Formen aus 10.6-11 haben genau zwei Ausnahmewerte.

Beweis. Nach 5.1 stellt $f = (1,2,6)$ alle Zahlen $\notin N = \{4^k(8q+5)\}$ dar.

a) Setzt man $t = 2^k$, so wird $4^k(8q+5) - d.4^k = 4^k(8q+5-d)$ von f dargestellt, falls $8q+5-d \geq 0$, $d \not\equiv 0\ (8)$ und $d \not\equiv 1\ (4)$ gilt.

b) Mit $t = 2^{k-1}$ $(k \geq 1)$ wird $4^k(8q+5) - d.4^{k-1} = 4^{k-1}(32q+20-d)$ für $d \not\equiv 7\ (8)$, $d \not\equiv 0\ (32)$, $d \not\equiv 4\ (16)$ von f angenommen.

Aus a) und b) ergibt sich, dass die Formen $(1,2,6,d)$ mit $d = 14,18,19$ alle Zahlen $\not\equiv 5,13$ darstellen.

c) Für $d = 7$ sind nach a) noch die Zahlen 5.4^k zu untersuchen. Setzt man für $k \geq 2$ $t = 2^{k-2}$, so wird $4^k.5 - 7.4^{k-2} = 4^{k-2}(8.9+1)$ durch f dargestellt. Die einzigen Ausnahmewerte von $(1,2,6,7)$ sind somit 5 und 20.

d) Für $d = 9$ sind nach b) noch die Werte $8q+5$ zu betrachten. Mit $t = 1$

wird $8q+5-9 = 8(q-1)+4 = 4(2(q-1)+1)$ für $q \geq 1$ und $q \not\equiv 3\ (4)$ von f angenommen. Bei den Zahlen $8q+5$ mit $q \equiv 3\ (4)$, $q \geq 7$ kann $t = 2$ gewählt werden, dann ist $8q+5 - 9.2^2 = 8(q-4)+1 \notin N$; so dass (1,2,6,9) nur die Zahlen 5 und 29 auslässt.

e) Für $d = 20$ müssen nach a) noch die Werte 5.4^k und 13.4^k untersucht werden. Mit $t = 2^{k-1}$ $(k \geq 1)$ wird aber sowohl $5.4^k - 20.4^{k-1} = 0$ als auch $4^k.13 - 20.4^{k-1} = 8.4^k = 2.4^{k+1}$ von f angenommen; die Form (1,2,6,20) stellt somit alle Zahlen $\neq 5,13$ dar.

§ 13. Hilfssätze.

13.1 Die Gleichungen $m - d.1^2 = 4^k(16q+2v)$, $m - d.3^2 = 4^{k'}(16q'+2v)$ (d,v ungerade) können nur unter folgenden Bedingungen zusammen bestehen:

a) $k = 1$, falls $d-v = 4u$. Ist dabei $u \equiv 1\ (2)$, so ist $k' = 2$, also $m = 9d + 256q' + 32v$. $u \equiv 0\ (2)$ bedingt $k' > 2$.

b) $k' = 1$, falls $d-v \equiv 2\ (4)$ gilt, also $d+v = 4w$ ist. Ist hierbei $w \equiv 1\ (2)$, so ist $k = 2$, also $m = d + 256q + 32v$. $w \equiv 0\ (2)$ bedingt $k > 2$.

Beweis. Aus den Voraussetzungen folgt

13.1-1 $$8d = 4^k(16q+2v) - 4^{k'}(16q'+2v).$$

1) $k = 0$. Die Annahme $k' > 0$ führt zum Widerspruch $4 \mid 16q+2v$; folglich muss $k' = 0$ sein, dann ergibt sich jedoch der Widerspruch $8d = 16(q-q')$, da d ungerade vorausgesetzt war.

2) $k > 0$ bedingt auch $k' > 0$ und man erhält

13.1-2 $$d = 4^{k-1}(8q+v) - 4^{k'-1}(8q'+v).$$

I) $k = 1$: Aus $d-v = 8q - 4^{k'-1}(8q'+v)$ folgt $k' > 1$, da d-v gerade ist.

a) Gilt $d-v = 4u$, dann ist $u = 2q - 4^{k'-2}(8q'+v)$.

A) $u \equiv 1\ (2)$ hat $k' = 2$ zur Folge, $u+v = 2q-8q'$.

B) $u \equiv 0\ (2)$ bedingt $k' > 2$: $\frac{u}{2} = q - 4^{k'-3}(16q'+2v)$.

b) Ist aber $d-v = 2u_1$ mit ungeradem u_1, dann folgt der Widerspruch $2u_1 = 8q - 4^{k'-1}(8q'+v)$.

II) $k > 1$: Da d ungerade ist, muss $k' = 1$ sein und es ergibt sich

13.1-3 $\qquad d+v = 4^{k-1}(8q+v) - 8q'.$

a) Aus $d-v = 4u$ folgt $d+v \equiv 2\ (4)$; dann ist jedoch die rechte Seite in 13.1-3 durch vier teilbar, die linke dagegen nicht.

b) Ist aber $d-v \equiv 2\ (4)$, so ist $d+v = 4w$ und es folgt

$w = 4^{k-2}(8q+v) - 2q'.$

A) w ungerade bewirkt $k = 2$, $w-v = 8q-2q'$.

B) w gerade hat $k > 2$ zur Folge, $\frac{w}{2} = 4^{k-3}(16q+2v) - q'$,

$q' = 4^{k-3}(16q+2v) - \frac{w}{2} \geq 2v - \frac{w}{2}$.

Somit gibt es in jedem Fall $d-v \equiv 0\ (4)$, $d-v \equiv 2\ (4)$ genau eine Möglichkeit, damit die beiden Gleichungen $m - d.1^2 = 4^k(16q+2v)$, $m - d.3^2 = 4^{k'}(16q'+2v)$ zusammen bestehen können.

13.2 Ist $d-v = 8u$ bzw. $d+v = 8w$ (d,v ungerade), so können die drei Aussagen $m - d = 4^k(16q+2v)$, $m - d.3^2 = 4^{k'}(16q'+2v)$, $m - d.5^2 = 4^{k''}(16q''+2v)$ nicht zusammen bestehen.

Beweis. Nach 13.1 folgt aus $m - d = 4^k(16q+2v)$, $m - d.3^2 = 4^{k'}(16q'+2v)$ für $d-v = 8u$: $k = 1$, $k' > 2$ und

für $d+v = 8w$: $k > 2$, $k' = 1$.

a) Sei $d-v = 8u$. Angenommen, es sei zudem $m - d.5^2 = 4^{k''}(16q''+2v)$. Dann folgt $24d = 4(16q+2v) - 4^{k''}(16q''+2v)$. Hieraus erhält man $k'' \geq 1$ und

13.2-1 $\qquad 3d-v = 8q - 4^{k''-1}(8q''+v).$

Da $d = 8u+v$ ist, so gilt $3d-v = 24u+2v \equiv 2\ (4)$. Damit folgt aus 13.2-1 $k'' > 1$, dann ist aber die rechte Seite in 13.2-1 durch vier teilbar, die linke dagegen nicht.

b) Sei $d+v = 8w$. Angenommen, es sei auch $m - d.5^2 = 4^{k''}(16q''+2v)$ möglich. Dann folgt $24d = 4^k(16q+2v) - 4^{k''}(16q''+2v)$. Hieraus erhält man $k'' \geq 1$ und $3d = 4^{k-1}(8q+v) - 4^{k''-1}(8q''+v)$. Da $k > 2$ ist, so ist $k'' = 1$: $3d+v = 4^{k-1}(8q+v) - 8q'' \equiv 0\ (4)$. Nach Voraussetzung ist jedoch $3d+v = 24w-2v \equiv 2\ (4)$.

Die drei Gleichungen können somit nicht zusammen bestehen.

§ 14. Die Formen 10.6-12 und 10.6-13.

14.1 Die Form F = (1,2,7,9) hat nur die Ausnahmewerte 5 und 14.

Beweis. Nach 6.1 stellt f = (1,2,9) alle Zahlen $2n \notin N = \{4^k(16q+14)\}$ dar.

a) Darstellung gerader Zahlen $\in N$: Wählt man $z = 2^k$, so wird $4^k(16q+14) - 7.4^k = 4^k(16q+7)$ für $k > 0$ durch f dargestellt. Ist $k = 0$, so ergibt sich mit $z = 2$: $16q+14 - 7.2^2 = 16(q-1)+2$; diese Zahl wird für $q \geq 1$ von f angenommen.

b) Darstellung der ungeraden Zahlen m : Wählt man $z = 1$, so wird $m-7$ durch f angenommen, falls $m-7 \neq 4^k(16q+14)$ und $m \geq 7$ ist. Gilt $m \geq 63$ und setzt man $z = 3$, so wird $m = 7.3^2$ durch f dargestellt, sofern $m - 63 \neq 4^{k'}(16q'+14)$ ist. Nach 13.1 kann die Gleichung $7 + 4^k(16q+14) = 63 + 4^{k'}(16q'+14)$ nur bestehen, wenn $k = 1$ und $k' \geq 3$ gilt. Dann ist $m = 63 + 4^{k'}(16q'+14) \geq 959$. Für $z = 5$ erhält man $m_1 = m - 7.5^2 = 4^{k'}(16q'+14) - 112$. Nach 13.2 und 6.1 wird m_1 von f dargestellt. Zu untersuchen sind noch die Zahlen $m < 7$ und $m = 7 + 4^k(16q+14) < 63$.

1) $m < 7$: $1 = 1.1^2$, $3 = 1.1^2+2.1^2$, 5 wird durch (1,2,7,9) nicht dargestellt.

2) $m = 7 + 4^k(16q+14) < 63$: $21 = 2^2+2.2^2+9.1^2$, $37 = 3^2+7.2^2$, $53 = 6^2+2.2^2+9.1^2$.

Somit stellt (1,2,7,9) alle Zahlen $\neq 5$ und 14 dar.

14.2 Die Form (1,2,7,17) stellt alle Zahlen $\neq 5$ und 14 dar.

Beweis. Die Form f = (1,2,7) stellt jede Zahl 3n, 3n+1, die nicht der Menge $N = \{7^{2k+1}(7q+e) \mid e = 3,5,6\}$ angehört, dar (G. Pall (33)).

a) Darstellung der Zahlen $3n \in N$: Für $t = 1$ wird $m_1 = 3n-17 = 7^{2k+1}(7q+e) - 17 \notin N$, da $m_1 \equiv 4\ (7)$ gilt; da ferner $m_1 \equiv 1\ (3)$ und $m_1 \geq 21-17 \geq 0$ ist, so stellt f die Zahl m_1 dar.

b) Darstellung der Zahlen $3n+1 \in N$: Für $t = 3$ wird $m_2 = 3n+1 - 17.3^2 = 7^{2k+1}(7q+e) - 17.3^2 \notin N$, da $m_2 \equiv 1\ (7)$ ist. Ist ferner $m_2 \geq 0$, so

nimmt f die Zahl m_2 an, da $m_2 \equiv 1\ (3)$ gilt. Zu untersuchen ist somit noch jede Zahl $3n+1 = 7^{2k+1}(7q+e) < 153 : 70 = 2.1^2+17.2^2$, $91 = 4^2+7.1^2+17.2^2$, $133 = 2.1^2+7.3^2+17.2^2$.

c) Darstellung der Zahlen $m = 3n+2$: Mit $t = 1$ und $t = 2$ wird $m - 17t^2 \equiv 0\ (3)$. Aus der Annahme $m - 17 \in N$, $m - 17.2^2 \in N$ folgt $7 \mid 51$. Somit ist eine der Zahlen m-17 bzw. m-68 für $m \geq 68$ durch f darstellbar.

1) $m < 17 : 2 = 2.1^2$, $8 = 2.2^2$, $11 = 2^2+7.1^2$, 5 und 14 werden durch (1,2,7,17) nicht angenommen.

2) $m = 17 + 7^{2k+1}(7q+e) < 68 : 38 = 6^2+2.1^2$, $59 = 3^2+2.5^2$.

Damit stellt (1,2,7,17) alle Zahlen $\neq 5,14$ dar.

<u>14.3</u> Die Form F = (1,2,7,18) stellt jede Zahl $\neq 5,14$ dar.

Beweis. a) Darstellung der Zahlen 3n, 3n+1 : Die Form g = (1,2,7) stellt jede Zahl 3n, $3n+1 \notin N = \{7^{2k+1}(7q+e) \mid e = 3,5,6\}$ dar. Zu untersuchen sind also noch die Werte $m' \in N$. Ist $m' \equiv 0,1\ (3)$, so ist auch $m' - 18t^2 \equiv 0,1\ (3)$. Mit $t = 1$ wird $m'-18 \equiv 3\ (7)$ durch g dargestellt, da $m' \geq 21$ ist.

b) Darstellung der Zahlen 3n+2 : Um über diese Zahlen Aussagen machen zu können, werden die Zahlklassen $m = 27n+\bar{n}$ mit $\bar{n} \equiv 2\ (3)$ und $2 \leq \bar{n} \leq 26$ betrachtet. Zunächst einige Vorbemerkungen:

I) Nach 8.1 stellt die Form f = (1,7,18) jede Zahl 27n, 27n+9 dar $\notin N = \{7^{2k+1}(63q+9e) \mid e = 3,5,6\}$.

II) Subtrahiert man von der Zahl $m = 27n+\bar{n}$ Quadrate $2y_1^2$, $2y_2^2$, so dass $m_1 = m - 2y_1^2 = 27l_1$, $m_2 = m - 2y_2^2 = 27l_2+9$ gilt, so führt für $y_2+y_1 \not\equiv 0\ (7)$ und $y_2-y_1 \not\equiv 0\ (7)$ die Annahme $m_1 \in N$, $m_2 \in N$ zum Widerspruch $7 \mid 2(y_2^2-y_1^2) = 2(y_2-y_1)(y_2+y_1)$. Ist somit $m \geq \mathrm{Max}(2y_1^2, 2y_2^2)$, so wird m_1 oder m_2 durch f dargestellt.

III) Nach II) sind dann noch folgende Zahlen zu untersuchen:

1) Zahlen $\bar{m} = 27n+\bar{n} < \mathrm{Min}(2y_1^2, 2y_2^2)$

2) Zahlen $\bar{m} = 27n+\bar{n} = \mathrm{Min}(2y_1^2, 2y_2^2) + 7^{2k+1}(63q+9e) < \mathrm{Max}(2y_1^2, 2y_2^2)$.

Im Folgenden wird nun jede Zahlklasse $27n+\bar{n}$ betrachtet. Diese Untersuchungen sind in einer Tabelle zusammengestellt:

n	y_1	y_2	$\bar{n}$	$\bar{\bar{n}}$
$27n+2$	1	19	-	$191 = 1^2+7.2^2+18.3^2$ $380 = 8^2+7.2^2+18.4^2$
$27n+5$	4	5	5 wird durch F ausgelassen	-
$27n+8$	2	11	-	$197 = 10^2+2.3^2+7.1^2+18.2^2$
$27n+11$	10	1	-	-
$27n+14$	13	4	14 wird von F ausgelassen	-
$27n+17$	7	2	-	-
$27n+20$	8	10	$20 = 2.1^2+18.1^2$ $47 = 1^2+2.3^2+7.2^2$ $74 = 2.1^2+18.2^2$ $101 = 1^2+7.2^2+18.2^2$	-
$27n+23$	5	13	$23 = 4^2+7.1^2$	$239 = 7^2+7.2^2+18.3^2$
$27n+26$	11	7	$26 = 1^2+2.3^2+7.1^2$ $53 = 5^2+7.2^2$ $80 = 2.2^2+18.2^2$	-

Jede Zahl $3n+2 \neq 5,14$ wird somit durch F dargestellt.

Aus a) und b) folgt, dass F nur die Werte 5 und 14 auslässt.

<u>14.4</u> Die Form (1,2,7,19) stellt alle Zahlen $\neq 5,14$ dar.

Beweis. $f = (1,2,7)$ stellt jede Zahl $3n$, $3n+1$ dar $\notin N = \{ 7^{2k+1}(7q+e) \mid e = 3,5,6 \}$.

a) Darstellung der Zahlen $3n \in N$: Es ist $m_1 = 3n - 19.3^2 = 7^{2k+1}(7q+e) - 19.3^2 \notin N$, da $m_1 \equiv 4\ (7)$ ist; ausserdem ist $m_1 \equiv 0\ (3)$, jede Zahl $m_1 \geq 0$ wird somit von f angenommen. Da ferner $21 = 2.1^2+19.1^2$, $42 = 4^2+7.1^2+19.1^2$, $84 = 2.2^2+19.2^2$, $168 = 8^2+7.2^2+19.2^2$ gilt, so stellt (1,2,7,19) alle Zahlen $3n$ dar.

b) Darstellung der Zahlen $3n+1 \in N$: Da $m_2 = 3n+1-19 \equiv 0\ (3)$ und $m_2 = 7^{2k+1}(7q+e) - 19 \equiv 2\ (7)$ mit $m_2 > 2$ gilt, so stellt f alle Werte m_2 dar.

c) Darstellung der Zahlen $m = 3n+2$: Mit $t = 1$ und $t = 2$ ist $m - 19t^2 \equiv 1\ (3)$. Aus der Annahme, es sei $m-19 \in N$ und $m - 19.2^2 \in N$ folgt $57 \equiv 0\ (7)$. Für $m \geq 76$ ist somit stets eine der beiden Zahlen $m-19$, $m-19.2^2$ durch f darstellbar.

1) $m < 19$: $2 = 2.1^2$, $8 = 2.2^2$, $11 = 2^2+7.1^2$, $17 = 3^2+2.2^2$, die Zahlen 5 und 14 werden von (1,2,7,19) nicht angenommen.

2) $m = 19 + 7^{2k+1}(7q+e)$: Hier ist $m \geq 89$.

Damit stellt (1,2,7,19) alle Zahlen $\neq 5,14$ dar.

<u>14.5</u> Die Form $F = (1,2,7,20)$ stellt alle Zahlen $\neq 5,14$ dar.

Beweis. $f = (1,2,7)$ stellt jede Zahl $3n$, $3n+1$ dar $\notin N$ = $= \{ 7^{2k+1}(7q+e) \mid e = 3,5,6 \}$.

a) Darstellung der Zahlen $3n \in N$: Es ist $m_1 = 3n-20 \equiv 1\ (3)$ und $m_1 = 7^{2k+1}(7q+e) - 20 \equiv 1\ (7)$, da ferner $m_1 \geq 1$ ist, so wird m_1 von f dargestellt.

b) Darstellung der Zahlen $3n+1 \in N$: Es ist $m_2 = 3n+1 - 20.3^2 \equiv 1\ (3)$ und $m_2 = 7^{2k+1}(7q+e) - 20.3^2 \equiv 2\ (7) \notin N$. Falls also $m_2 \geq 0$ ist, so wird m_2 durch f angenommen. Da für die Zahlen $3n+1 = 7^{2k+1}(7q+e) < 180$ Darstellungen durch F vorhanden sind: $70 = 2.5^2+20.1^2$, $91 = 3^2+2.1^2+20.2^2$, $133 = 5^2+7.2^2+20.2^2$, so lässt F keinen Wert $3n+1$ aus.

c) Darstellung der Zahlen $3n+2$: Ist $m \equiv 2\ (3)$, so ist $m-20t^2 \equiv 0\ (3)$ für $t = 1$ und $t = 2$. Aus der Annahme $m_3 = m-20 \in N$, $m_4 = m-20.2^2 \in N$ folgt $60 \equiv 0\ (7)$. Einer der beiden Werte m_3, m_4 wird somit für $m \geq 80$ durch f dargestellt.

1) $m < 20$: $2 = 2.1^2$, $8 = 2.2^2$, $11 = 3^2+2.1^2$, $17 = 3^2+2.2^2$, die Zahlen 5 und 14 werden von (1,2,7,20) ausgelassen.

2) $m = 20 + 7^{2k+1}(7q+e) < 80$: $41 = 3^2+2.4^2$, $62 = 4^2+2.3^2+7.2^2$

Somit stellt (1,2,7,20) alle Zahlen $\neq 5,14$ dar.

14.6 Die Formen 10.6-13 haben genau zwei Ausnahmewerte.

Beweis. Nach 4.6 stellt f = (1,2,8) alle Zahlen $\notin N = \{4^k(8q+7),\ 8q+5\}$ dar.

a) d = 9.

1) Darstellung der Zahlen $4^k(8q+7)$: Wählt man $t = 2^k$, so erhält man für $q \geq 1$ $4^k(8q+7) - 9.4^k = 4^k(8(q-1)+6) \notin N$. Bei den Zahlen 7.4^k mit $k > 0$ kann $t = 2^{k-1}$ gesetzt werden, dann wird $4^k.7 - 9.4^{k-1} = 4^{k-1}(8.2+3)$ durch f dargestellt.

2) Darstellung der Zahlen 8q+5 : Mit t = 1 wird 8q+5-9 = 4(2(q-1)+1) von f angenommen, sofern $q \geq 1$ und $q \not\equiv 0\ (4)$ gilt. Ist $q \equiv 0\ (4)$ und $q \geq 4$, so wird für t = 2 die Zahl $8q+5 - 9.2^2 = 8(q-4)+1$ durch f dargestellt.

Die Form (1,2,8,9) stellt damit alle Zahlen $\neq 5,7$ dar.

b) d = 12.

1) Darstellung der Zahlen $4^k(8q+7)$: Wählt man $t = 2^k$, so wird $4^k(8q+7) - 12.4^k = 4^k(8(q-1)+3)$ für $q \geq 1$ durch f dargestellt. Ist bei den Zahlen 7.4^k $k > 0$, so kann $t = 2^{k-1}$ gesetzt werden, man erhält dann $4^k.7 - 12.4^{k-1} = 4^{k+1} \notin N$.

2) Darstellung der Zahlen 8q+5 : Mit t = 1 erhält man 8q+5 - 12 = 8(q-1)+1 und f stellt diese Zahl für $q \geq 1$ dar.

Damit hat die Form (1,2,8,12) nur die Ausnahmewerte 5 und 7.

§ 15. Die Formen 10.6-14 und 10.6-15.

15.1 Die Form (1,2,9,10) stellt alle Zahlen $\neq 5,7$ dar.

Beweis. Wie in 8.6 angegeben wurde, stellt f = (1,2,10) alle Zahlen $\notin N = \{5^{2k+1}(5q+e),\ 8q+7 \mid e = 1,4\}$ dar.

a) Darstellung der Zahlen $5^{2k+1}(5q+e)$: Für z = 1 wird $m_1 = 5^{2k+1}(5q+e) - 9 \equiv 1\ (5)$ und für z = 2 erhält man $m_2 = 5^{2k+1}(5q+e) - 9.4 \equiv$

$\equiv 4\ (5)$. Angenommen, es sei $m_1 = 8q_1+7$, $m_2 = 8q_2+7$, dann folgt $m_1-m_2 = 27 = 8(q_1-q_2)$. Ist somit $m_2 \geq 0$, d.h. $5^{2k+1}(5q+e) \geq 36$, so stellt f eine der Zahlen m_1, m_2 dar.

1) $5^{2k+1}(5q+e) < 9$: 5 wird von (1,2,9,10) ausgelassen.

2) $5^{2k+1}(5q+e) = 8q_1+16 \geq 80 > 36$.

b) Darstellung der Zahlen 8q+7 : Wählt man z = 1, so wird $m_3 = 8q+7-9 = 8(q-1)+6$, für z = 2 ergibt sich $m_4 = 8q+7-9.2^2 = 8(q-4)+3$. Da die Annahme $m_3 = 5^{2k'+1}(5q'+e')$ (e' = 1,4), $m_4 = 5^{2k''+1}(5q''+e'')$ (e'' = 1,4) zum Widerspruch $27 \equiv 0\ (5)$ führt, so wird für $8q+7 \geq 36$ eine der Zahlen m_3, m_4 von f angenommen.

1) $8q+7 < 9$: 7 wird von (1,2,9,10) ausgelassen.

2) $8q+7 = 9 + 5^{2k'+1}(5q'+e') \geq 39$.

Folglich stellt (1,2,9,10) alle Zahlen $\neq 5,7$ dar.

15.2 Die Form (1,2,9,11) hat nur die Ausnahmewerte 5 und 7.

Beweis. Nach 6.1 stellt f = (1,2,9) alle geraden Zahlen $\notin N = \{4^k(16q+14)\}$ dar.

a) Darstellung der geraden Zahlen $\in N$: Für $t = 2^k$ wird $4^k(16q+14) - 11.4^k = 4^k(16q+3)$ von f angenommen, sofern k > 0 ist. Bei den Zahlen 16q+14 mit $q \geq 2$ kann t = 2 gewählt werden, denn f lässt den Wert $16q+14 - 11.2^2 = 16(q-2)+2$ nicht aus. Da aber $14 = 1^2+2.1^2+11.1^2$ und $30 = 1^2+2.3^2+11.1^2$ gilt, so stellt (1,2,9,11) alle geraden Zahlen dar.

b) Darstellung ungerader Zahlen : Ist $m \equiv 1\ (2)$, so wird $m_1 = m-11$ von f dargestellt, falls $m_1 \geq 0$ und $m_1 \notin N$ ist. Wählt man t = 3, so ist für $m \geq 99$ und $m-99 \notin N$ die Zahl $m_2 = m-11.3^2$ durch f darstellbar. Nach 13.1 sind die Gleichungen $m_1 = 4^k(16q+14)$ und $m_2 = 4^{k'}(16q'+14)$ nur möglich für k = 1, k' = 2. Dann wird $m = 256q'+323$ und $m - 11.5^2 = 256q'+48 = 4^2(16q'+3)$ wird von f angenommen. Zu untersuchen sind noch die Zahlen

1) $m < 11$: $1 = 1^2$, $3 = 1^2+2.1^2$, $9 = 9.1^2$, die Werte 5 und 7 werden von (1,2,9,11) ausgelassen.

2) $m = 11 + 4^k(16q+14) < 99$: $25 = 5^2$, $41 = 2.4^2+9.1^2$, $57 = 2^2+9.1^2+11.2^2$, $67 = 7^2+2.3^2$, $73 = 1^2+2.6^2$, $89 = 6^2+9.1^2+11.2^2$.

(1,2,9,11) nimmt somit alle Zahlen $\neq 5,7$ an.

15.3 Die Form (1,2,9,13) lässt nur die Werte 5 und 7 aus.

Beweis. Die ternäre Teilform f = (1,2,9) nimmt nach 6.1 alle geraden Zahlen $\notin N = \{4^k(16q+14)\}$ an.

a) Darstellung gerader Zahlen $\in N$: Für $t = 2^k$ wird $4^k(16q+14) - 13.4^k = 4^k(16q+1)$ durch f dargestellt, falls $k > 0$ ist. Im Falle $k = 0$ und $q \geq 3$ stellt f die Zahl $16q+14 - 13.2^2 = 16(q-3)+10$ dar. Da $14 = 1^2+13.1^2$, $30 = 3^2+2.2^2+13.1^2$, $46 = 5^2+2.2^2+13.1^2$ ist, so stellt (1,2,9,13) alle geraden Zahlen dar.

b) Darstellung ungerader Zahlen m : Nach 13.1 können die Zahlen $m_1 = m-13$ und $m_2 = m-13.3^2$ nicht beide von der Gestalt $4^{k'}(16q'+14)$ sein, ausser wenn $m = 256q+237$ gilt. Ist somit $m \neq 256q+237$ und $m \geq 117$, so stellt f eine der beiden Zahlen m_1, m_2 dar. Für $m = 256q+237$ mit $q \geq 1$ kann $t = 5$ gewählt werden, dann ist $m - 13.5^2 = 256(q-1)+168 = 4(64(q-1)+42) = 4(16(4q-2)+10) \notin N$. Zu untersuchen sind noch die Werte
1) $m < 13$: $1 = 1^2$, $3 = 1^2+2.1^2$, $9 = 9.1^2$, $11 = 2.1^2+9.1^2$, die Zahlen 5 und 7 werden von (1,2,9,13) ausgelassen.
2) $m = 13 + 4^{k'}(16q'+14) < 117$: $27 = 3^2+2.3^2$, $43 = 5^2+2.3^2$, $59 = 3^2+2.5^2$, $69 = 3^2+2.2^2+13.2^2$, $75 = 5^2+2.5^2$, $91 = 1^2+2.1^2+9.2^2+13.2^2$, $107 = 3^2+2.7^2$
3) $m = 237 = 3^2+2.4^2+9.4^2+13.2^2$.

Somit stellt (1,2,9,13) alle Zahlen $\neq 5,7$ dar.

15.4 Die Form F = (1,2,9,14) stellt alle Zahlen $\neq 5,7$ dar.

Beweis. a) Darstellung gerader Zahlen: Die Form (1,2,9) stellt nach 6.1 alle Zahlen $2n \notin N_1 = \{4^k(16q+14)\}$ dar. Ist $2n \in N_1$ mit $k > 0$, so ergibt sich mit $t = 2^{k-1}$ $4^k(16q+14) - 14.4^{k-1} = 4^{k-1}(16(4q+2)+10) \notin N_1$. Ist dagegen $2n \in N_1$ und $k = 0$, so erhält man mit $t = 1$ für $q \neq 4^{k'}(16q'+14)$ $16q+14-14 = 4^2q \notin N_1$ und in dem verbleibenden Fall $2n \in N_1$ mit $q =$

$= 4^{k'}(16q'+14)$ ist für $t = 2$: $16q+14 - 14.2^2 = 16(q-3)+6 \notin N_1$.

F stellt daher alle geraden Zahlen dar.

b) Darstellung von Zahlen 3n, 3n+2 : Nach 7.4 stellt $g = (1,2,14)$ jede Zahl 3n, 3n+2 $\notin N_2 = \{7^{2k+1}(7q+e) \mid e = 3,5,6\}$ und $\notin N_3 = \{8q+5\}$ dar. Aus $m \equiv \{\begin{smallmatrix}0\\2\end{smallmatrix}\ (3)$ folgt $m - 9z^2 \equiv \{\begin{smallmatrix}0\\2\end{smallmatrix}\ (3)$ für alle z.

I) Ist $m \in N_2$, so ist $m_1 = m - 9.1^2 \equiv 5\ (7)$ und $m_2 = m - 9.2^2 \equiv 6\ (7)$. Da aus der Annahme $m_1 \in N_3$ und $m_2 \in N_3$ folgen würde $8|27$, so stellt für $m_2 \geq 0$ die Form g entweder m_1 oder m_2 dar. $m_2 \geq 0$ bedingt $m \geq 36$, für die Zahlen $m = 9+8\bar{q}+5 = 8\bar{q}+14 \in N_2$ ist dies stets erfüllt.

II) Ist $m = 8q+5 \in N_3$, so ist $m_3 = m-9 = 8(q-1)+4 \notin N_3$ und $m_4 = m - 9.2^2 = 8(q-4)+1 \notin N_3$. Die Annahme $m_3 \in N_2$ und $m_4 \in N_2$ führt zum Widerspruch $27 \equiv 0\ (7)$; da für $q = 1,2,3$ stets $m_3 \notin N_2$ ist, so stellt g die Zahl m_3 oder die Zahl m_4 für alle $q \geq 1$ dar. Die Zahl 5 ($q = 0$) wird durch F nicht angenommen.

F stellt damit alle Zahlen 3n, 3n+2 $\neq 5$ dar.

c) Darstellung der Zahlen 3n+1 : Um über eine Darstellung der Zahlen 3n+1 Aussagen machen zu können, werden die Zahlklassen $27n+\bar{n}$ mit $\bar{n} \equiv 1\ (3)$, $1 \leq \bar{n} \leq 25$ betrachtet. Zunächst einige Vorbemerkungen:

I) Nach 8.2 stellt $f = (2,9,14)$ alle Zahlen 27n, 27n+18 dar $\notin N_4 = \{72q+45\}$ und $\notin N_5 = \{7^{2k+1}(63q+e) \mid e = 27,45,54\}$.

II) Eine Zahl 27n bzw. 27n+18 gehört genau dann zu N_4, wenn $n \equiv 7\ (8)$ bzw. $n \equiv 1\ (8)$ gilt.

III) Ist $m = 27n+\bar{n}$ und werden von m Quadrate x_1^2, x_2^2 subtrahiert, so dass $m - x_1^2 = 27l_1$ und $m - x_2^2 = 27l_2+18$ ist, so führt für $l_2-l_1 \neq 4\ (7)$ die Annahme $m - x_1^2 \in N_5$, $m - x_2^2 \in N_5$ zum Widerspruch $7|x_1^2-x_2^2 = 27(l_2-l_1)+18$.

Im folgenden wird nun jede Zahlklasse $27n+\bar{n}$ untersucht.

1) Zahlen $m = 27n+1$: Setzt man $x_1 = 1$, $x_2 = 19$, so ist $m - x_1^2 = 27n$ und $m - x_2^2 = 27(n-14)+18$. Für $n \neq 7\ (8)$ ist nach II) $m - x_1^2 \notin N_4$ und $m - x_2^2 \notin N_4$; da ferner mit $l_1 = n$ und $l_2 = n-14$ die Differenz $l_2-l_1 \equiv 0\ (7)$

ist, folgt nach III), dass entweder $m - x_1^2 \notin N_5$ oder $m - x_2^2 \notin N_5$ ist, d.h. für $n \not\equiv 7\ (8)$ und $m \geq 361$ wird eine der beiden Zahlen $m - x_1^2$ oder $m - x_2^2$ nach I) durch f dargestellt. Eine einfache Rechnung zeigt, dass es keine Zahlen $m = 27n+1 = 1 + 7^{2k+1}(63q+e) < 361$ gibt mit $n \not\equiv 7\ (8)$, daher brauchen nur noch die Zahlen $27n+1$ mit $n \equiv 7\ (8)$ untersucht werden. Diese sind gerade und daher nach a) durch F darstellbar.
F stellt somit jede Zahl $27n+1$ dar.

2) Zahlen $m = 27n+4$: Wegen a) kann $n \not\equiv 6\ (8)$ vorausgesetzt werden. Dann ist mit $x_1 = 2$, $x_2 = 11$ nach III) $l_2 - l_1 \equiv -5 \not\equiv 4\ (7)$. Ist daher $m \geq 121$ und $n \not\equiv 7\ (8)$, so wird nach I),II) und III) eine der Zahlen $m - x_1^2$ bzw. $m - x_2^2$ durch f dargestellt. Zahlen $m = 27n+4 = 4 + 7^{2k+1}(63q+e)$, die kleiner als 121 sind, gibt es nicht.
Ist nun $n \equiv 7\ (8)$, etwa $n = 8\bar{k}+7$, so wird $m = 216\bar{k}+193$. Nach I),II) und III) wird dann eine der Zahlen $m - 25^2 = 27(n-23)$, $m - 16^2 = 27(n-10)+18$ durch f dargestellt, falls $\bar{k} \geq 2$ bzw. $m \geq 25^2$ ist. $\bar{k} = 0$ bedingt $m = 193 = 7^2+2.3^2+14.3^2$ und für $\bar{k} = 1$ ist $m - 16^2 \notin N_5$.

3) Für die noch zu behandelnden Werte $\bar{n} = 7,10,13,16,19,22,25$ erhält man Ergebnisse mittels der bei 1) und 2) vorgeführten Schlüsse: Für die Restklassen von n mod 8 wählt man geeignete Werte x_1, x_2, so dass $m - x_1^2 \equiv 0\ (27)$ oder $m - x_2^2 \equiv 18\ (27) \notin \{N_4, N_5\}$ ist. Zu untersuchen sind dann noch die Zahlen $\bar{m} < \mathrm{Min}(x_1^2, x_2^2)$ sowie die Werte $\tilde{m} = \mathrm{Min}(x_1^2, x_2^2) + 7^{2k+1}(63q+e) < \mathrm{Max}(x_1^2, x_2^2)$. Die betreffenden Werte sind in folgender Tabelle zusammengestellt:

m	n	x_1	x_2	$\bar{m}$	$\tilde{m}$	Bemerkung.
27n+7	$\not\equiv 5\ (8)$, $\not\equiv 2\ (8)$	13	4	7 wird durch F nicht dargestellt	keine	-
	$\equiv 2\ (8)$	13	23	$61 = 3^2+2.1^2+9.2^2+14.1^2$	keine	-
	$\equiv 5\ (8)$	-	-	-	-	nach a)
27n+10	$\not\equiv 1\ (8)$, $\not\equiv 5\ (8)$	8	10	$10 = 1^2+9.1^2$	keine	-

m	n	x_1	x_2	$\bar{m}$	$\tilde{m}$	Bemerkung.
27n+10	$\equiv 1\ (8)$	19	10	$37 = 1^2+9.2^2$	keine	-
	$\equiv 5\ (8)$	8	17	keine	keine	-
27n+13	$\not\equiv 3\ (8)$	11	7	$13 = 2^2+9.1^2$		
				$40 = 2^2+9.2^2$	keine	-
	$\equiv 3\ (8)$	-	-	-	-	nach a)
27n+16	$\not\equiv 7\ (8), \not\equiv 2\ (8)$	4	5	keine	keine	-
	$\equiv 7\ (8)$	23	22	$205 = 5^2+2.3^2+9.2^2+14.3^2$		
				$421 = 14^2+2.3^2+9.3^2+14.3^2$	keine	-
	$\equiv 2\ (8)$	-	-	-	-	nach a)
27n+19	$\not\equiv 2\ (8), \not\equiv 1\ (8)$	10	1	keine	keine	-
	$\equiv 2\ (8)$	17	1	keine	keine	-
	$\equiv 1\ (8)$	-	-	-	-	nach a)
27n+22	$\not\equiv 0\ (8), \not\equiv 1\ (8)$	7	2	keine	keine	-
	$\equiv 1\ (8)$	7	25	keine	keine	-
	$\equiv 0\ (8)$	-	-	-	-	nach a)
27n+25	$\not\equiv 7\ (8)$	5	13	keine	keine	-
	$\equiv 7\ (8)$	-	-	-	-	nach a)

Daher stellt F alle Zahlen 3n+1 ausser 7 dar.

Die Form (1,2,9,14) hat somit nur die Ausnahmewerte 5 und 7.

<u>15.5</u> Die Form (1,2,10,12) stellt alle Zahlen $\neq 5,7$ dar.

Beweis. Wie in 8.6 angegeben wurde, stellt f = (1,2,10) alle Zahlen $\notin N = \{8q+7,\ 5^{2k+1}(5q+e) \mid e = 1,4\}$ dar.

a) Darstellung der Zahlen $m = 5^{2k+1}(5q+e)$: Für t = 1 bzw. t = 2 wird $m - 12t^2 \not\equiv 0(5)$. Aus der Annahme $m_1 = m-12 = 8q_1+7$, $m_2 = m - 12.2^2 = 8q_2+7$ folgt $8 \mid 36$. Ist somit $m \geq 48$, so stellt f entweder m_1 oder m_2 dar. Zu untersuchen sind noch die Zahlen

1) $m < 12$: 5 wird von (1,2,10,12) ausgelassen.

2) $m = 12 + 8q_1 + 7 = 8q_1+19 < 48$: solche Zahlen gibt es nicht.

b) Darstellung der Zahlen 8q+7 : Für t = 1 bzw. t = 3 erhält man $m_3 = 8q+7-12 = 8(q-1)+3$ bzw. $m_4 = 8q+7 - 12.3^2 = 8(q-13)+3$. Die Annahme

$m_3 = 5^{2k+1}(5\bar{q}+e)$, $m_4 = 5^{2k'+1}(5q'+e')$ $(e' = 1,4)$ führt zum Widerspruch $96 \equiv 0\ (5)$. Ist somit $8q+7 \geq 108$, so stellt f eine der Zahlen m_3, m_4 dar. Es fehlen noch Darstellungen von

1) $8q+7 < 12 : 7$ wird von $(1,2,10,12)$ ausgelassen.

2) $8q+7 = 12 + 5^{2k+1}(5\bar{q}+e) < 108$: solche Werte gibt es nicht.

Damit stellt $(1,2,10,12)$ nur die Werte 5,7 nicht dar.

§ 16. Die Formen 10.6-16,...,10.6-20.

16.1 Die Form $(1,3,4,6)$ hat nur die Ausnahmewerte 2 und 30.

Beweis. Nach 5.2 stellt $f = (1,3,6)$ alle Zahlen $\notin N = \{4^k(16q+14), 3q+2\}$ dar.

a) Darstellung der Zahlen $4^k(16q+14)$: Für $z = 2^k$ wird $m_1 = 4^k(16q+14) - 4.4^k = 4^k(16q+10)$ und $z = 3.2^k$ ergibt $m_2 = 4^k(16q+14) - 4.9.4^k = 4^k(16(q-2)+10)$; die Annahme $m_1 = 3q_1+2$, $m_2 = 3q_2+2$ führt zum Widerspruch $3|8$; ist somit $q \geq 2$, so stellt f eine der Zahlen m_1, m_2 dar. Da $m_1 \equiv q+1\ (3)$ ist, so wird m_1 für $q = 0$ von f angenommen. Bei den Zahlen $4^k.30$ mit $k \geq 1$ kann $z = 3.2^{k-1}$ gewählt werden. Dann ist $m_3 = 4^k.30 - 4.9.4^{k-1} = 4^k(16+5) \equiv 0\ (3)$, also $m_3 \notin N$. Der Wert 30 wird von $(1,3,4,6)$ ausgelassen.

b) Darstellung der Zahlen $3q+2$: Für $z = 1$ bzw. $z = 2$ ergibt sich $m_4 = 3q+2-4 = 3(q-1)+1$ bzw. $m_5 = 3q+2-4.2^2 = 3(q-5)+1$. Angenommen, es sei $m_4 = 4^k(16\bar{q}+14)$, $m_5 = 4^{k'}(16q'+14)$, dann wird

$12 = 4^k(16\bar{q}+14) - 4^{k'}(16q'+14)$.

1) aus $k = 0$ folgt auch $k' = 0$ und $12 \equiv 0\ (16)$, somit muss

2) $k > 0$ sein, dann ist auch $k' > 0$, dies führt zum Widerspruch $12 \equiv 0\ (8)$.

Ist somit $3q+2 \geq 16$, so stellt f entweder m_4 oder m_5 dar.

A) $3q+2 < 4$: $(1,3,4,6)$ lässt den Wert 2 aus.

B) $3q+2 = 4 + 4^k(16\bar{q}+14) \geq 18 > 16$.

Die Form $(1,3,4,6)$ nimmt somit alle Werte $\neq 2,30$ an.

16.2 Die Form (1,3,5,8) hat nur die Ausnahmewerte 2 und 10.

Beweis. Nach 5.6 stellt f = (1,5,8) alle Zahlen dar $\notin N = \{8q+2, 8q+3, 8q+7, 5^{2k+1}(5q+e) \mid e = 2,3\}$.

a) Ist $m \equiv 0,1,4\ (8)$ und $m = 5^{2k+1}(5q+e)$, so ist $m-3 \equiv 5,6,1\ (8)$ und m-3 ist nicht von der Form $5^{2k'+1}(5q'+e')$ $(e' = 2,3)$. Da $m \geq 10$ ist, so wird m-3 von f angenommen.

b) Falls $m = 8q_1+5 \in N$ ist, so wird $m - 3.2^2 = 8(q_1-1)+1 \equiv 3\ (5)$ durch f dargestellt für $q_1 \geq 1$. Da $5^{2k+1}(5q+e) \equiv 5e \equiv \{\begin{matrix}2\\3\end{matrix}\ (8)$ ist für $q = 0$, so gilt für jedes $m = 8q_1+5 \in N$, dass $q_1 \geq 1$ ist.

c) Ist schliesslich $m \equiv 6\ (8)$ und $m = 5^{2k+1}(5q+e)$, so folgt $m \geq 110$. Dann wird $m - 3.4^2 \equiv 6\ (8)$ und f stellt m-48 dar, da $m-48 \equiv 2\ (5)$ ist.

Zu untersuchen sind noch die Zahlen 8q+2, 8q+3, 8q+7.

d) Ist $m = 8q_2+\begin{matrix}3\\7\end{matrix}$, so wird $m-3y^2 \equiv \{\begin{matrix}3\\7\end{matrix} - 3 \equiv \{\begin{matrix}0\\4\end{matrix}\ (8)$ für ungerades y. Da sus $m-3 = 5^{2k+1}(5q+e)$, $m - 3.3^2 = 5^{2k'+1}(5q'+e')$ $(e' = 2,3)$ der Widerspruch 5|24 folgt, so stellt f für $m \geq 27$ einen der Werte m-3, m-27 dar. Da jedoch aus $m = 3 + 5^{2k+1}(5q+e)$ die Abschätzung $m \geq 43$ folgt, so hat (1,3,5,8) keine Ausnahmewerte der Gestalt $8q_2+3$, $8q_2+7$.

e) Im Falle $m = 8q_3+2$ wird $m - 3(4s+2)^2 \equiv 2-4 \equiv 6\ (8)$ $(s = 0,1,2,\ldots)$. Die Annahme $m - 3.2^2 = 5^{2k+1}(5q+e)$, $m - 3.6^2 = 5^{2k'+1}(5q'+e')$ $(e' = 2,3)$ führt zum Widerspruch 5|96. Für $m \geq 108$ wird somit eine der Zahlen m-12, m-108 von f angenommen. Zu betrachten sind noch die Werte

1) $m < 12$: 2 und 10 werden von (1,3,5,8) ausgelassen.

2) $m = 12 + 5^{2k+1}(5q+e)$: Man erhält $m \geq 122 > 108$.

Damit lässt (1,3,5,8) nur die Werte 2 und 10 aus.

16.3 Die Form (1,3,5,7) aus 10.6-17 wird in § 19 behandelt.

16.4 Die Formen (1,4,6,d) haben nur die Ausnahmewerte 2 und 3 (d = 5, 7,8,11).

Beweis. Nach 5.3 stellt f = (1,4,6) jede Zahl $\notin N = \{3^{2k+1}(3q+1),\ 16q+2\}$ dar.

a) Darstellung der Zahlen $m = 3^{2k+1}(3q+1)$: Ist $t \not\equiv 0\ (3)$, so ist $m - dt^2 = 3^{2k+1}(3q+1) - dt^2$ nicht von der Gestalt $3^{2k'+1}(3q'+1)$, da d nicht durch drei teilbar ist. Angenommen, es sei $m_1 = m-d = 16q_1+2$, $m_2 = m-4d = 16q_2+2$, dann folgt $3d \equiv 0\ (16)$; diese Kongruenz ist jedoch für kein d erfüllt. Ist somit $m_2 \geq 0$, so wird einer der Werte m_1, m_2 von f angenommen.

1) Zahlen $3^{2k+1}(3q+1) < d$: 3 wird von (1,4,6,d) ausgelassen.

2) Zahlen $3^{2k+1}(3q+1) = d+16q_1+2 < 4d$: Für kein d gibt es solche Zahlen.

b) Darstellung der Zahlen $m = 16q+2$: Für $t = 1,3$ ist keiner der Werte $16q+2 - dt^2 \equiv 2\ (16)$, da hieraus $dt^2 \equiv 0\ (16)$, $t \equiv 0\ (2)$ folgen würde. Die Annahme $m_3 = 16q+2-d = 3^{2k+1}(3\bar{q}+1)$, $m_4 = 16q+2 - d.3^2 = 3^{2k'+1}(3q'+1)$ führt zum Widerspruch $8d \equiv 0\ (3)$. Ist somit $m_4 \geq 0$, so ist eine der Zahlen m_3, m_4 durch f darstellbar.

1) Werte $16q+2 < d$: 2 wird von (1,4,6,d) ausgelassen.

2) Werte $16q+2 = d + 3^{2k+1}(3\bar{q}+1) < 9d$: Für d = 7 ergibt sich $34 = 6.1^2+7.2^2$, im Falle d = 11 erhält man $50 = 6.1^2+11.2^2$.

Damit stellen die Formen (1,4,6,d) (d = 5,7,8,11) alle Zahlen $\neq 2,3$ dar.

<u>16.5</u> Die Form (1,5,6,7) hat nur die Ausnahmewerte 2 und 3.

Beweis. Nach 6.3 stellt f = (1,5,6) jede gerade Zahl $\notin N = \{4^k(16q+2)\}$ dar.

a) Darstellung gerader Zahlen $\in N$: Mit $t = 2^k$ wird $4^k(16q+2) - 7.4^k = 4^k(16(q-1)+11)$ von f angenommen, falls $k > 0$ und $q > 0$ ist. Wählt man für die Zahlen 2.4^k mit $k > 0$ $t = 2^{k-1}$, so wird $4^k.2 - 7.4^{k-1} = 4^{k-1}$ durch f nicht ausgelassen. Für die Zahlen $16q+2$ mit $q \geq 2$ kann $t = 2$ gesetzt werden, dann ist $16q+2 - 7.2^2 = 16(q-2)+6 \notin N$. Für q = 0 erhält man die Zahl 2, die von (1,5,6,7) ausgelassen wird und q = 1 ergibt $18 : 18 = 5.1^2+6.1^2+7.1^2$. Jede gerade Zahl $\neq 2$ wird somit von (1,5,6,7) angenommen.

b) Darstellung ungerader Zahlen m : Nach 13.1 wird eine der Zahlen $m-7$, $m-7.3^2$ durch f dargestellt, falls $m \geq 63$ und $m \neq 7 + 4^k(16q+2)$ mit $k \geq 3$ gilt. Ist jedoch $m = 7 + 4^k(16q+2)$ und $m \geq 175$, so wird nach 13.2 $m - 7.5^2$ durch f angenommen. Es fehlen somit nur noch Darstellungen der Zahlen

1) $m < 7$: $1 = 1^2$, $5 = 5.1^2$, 3 wird von (1,5,6,7) ausgelassen.

2) $m = 7 + 4^k(16q+2) < 63$: $9 = 3^2$, $15 = 3^2+6.1^2$, $25 = 5^2$, $39 = 5.1^2+6.1^2+7.2^2$, $41 = 6^2+5.1^2$, $57 = 3^2+5.2^2+7.2^2$.

3) $m = 7 + 4^k(16q+2) < 175$ mit $k \geq 3$: $135 = 9^2+5.2^2+6.1^2+7.2^2$.

Die Form (1,5,6,7) stellt somit jede Zahl $\neq 2,3$ dar.

16.6 Die Form (1,5,6,8) stellt jede Zahl $\neq 2,3$ dar.

Beweis. a) Darstellung gerader Zahlen: Nach 6.3 stellt $f = (1,5,6)$ jede gerade Zahl $\notin N = \{4^k(16q+2)\}$ dar. Mit $t = 2^k$ erhält man $4^k(16q+2) - 8.4^k = 4^k(16(q-1)+10) \notin N$ für $q \geq 1$. Für die Zahlen 2.4^k mit $k > 0$ kann $t = 2^{k-1}$ gewählt werden; f nimmt den Wert $4^k.2 - 8.4^{k-1} = 0$ an. Im Falle $k = 0$ ergibt sich 2, diese Zahl wird von (1,5,6,8) ausgelassen.

b) Darstellung ungerader Zahlen: Nach 5.6 stellt $g = (1,5,8)$ jede Zahl $\notin N = \{8q+2, 8q+3, 8q+7, 5^{2k+1}(5q+e) \mid e = 2,3\}$ dar.

1) Zahlen $m \equiv 1\ (4)$, $m \in N$: Ist $m \equiv 1\ (4)$, so ist $m - 6.2^2 \equiv 1\ (4)$ und $m - 6.2^2 \equiv 1\ (5)$. Da die Zahlen m alle grösser als 24 sind, so stellt g jede Zahl $m-24$ dar.

2) Zahlen $m \equiv 3\ (4)$: Ist $m \equiv 3\ (4)$, so wird $m - 6z^2 \equiv 1\ (4)$ für ungerades z. Aus der Annahme $m-6 = 5^{2k+1}(5q+e)$, $m - 6.3^2 = 5^{2k'+1}(5q'+e')$ $(e' = 2,3)$ folgt $5 \mid 48$. Ist somit $m \geq 54$, so stellt g eine der Zahlen $m-6$, $m-54$ dar. Zu untersuchen sind noch die Werte

A) $m < 6$: 3 wird von (1,5,6,8) ausgelassen.

B) $m = 6 + 5^{2k+1}(5q+e)$: Hieraus erhält man $m \geq 71 > 54$.

Somit stellt (1,5,6,8) alle Zahlen $\neq 2,3$ dar.

§ 17. Die Formen 10.6-21,...,10.6-23.

17.1 Die Form (2,2,2,3) stellt jede Zahl $\neq 1,17$ dar.

Beweis. Die Form f = (2,2,2) stellt nach 9.10 jede Zahl $\notin N = \{2q+1, 4^k(16q+14)\}$ dar.

a) Darstellung gerader Zahlen $\in N$: Mit $t = 2.2^k$ ist $4^k(16q+14)-3.4.4^k = 4^k(16q+2) \notin N$.

b) Darstellung ungerader Zahlen : Ist $m \equiv 1\ (2)$, so wird nach 13.1 eine der Zahlen $m-3$, $m-3.3^2$ durch f dargestellt, falls $m \geq 27$ und $m \neq 256q'+251$ ist. Hat aber m die Gestalt $m = 256q'+251$, so nimmt f die Zahl $m - 3.5^2 = 256q'+176 = 16(16q'+11)$ an. Es fehlen noch Darstellungen der Zahlen

1) $m < 3$: 1 wird von (2,2,2,3) ausgelassen.

2) $m = 3 + 4^k(16q+14) < 27$: 17 wird ebenfalls von (2,2,2,3) nicht dargestellt.

Die einzigen Ausnahmewerte von (2,2,2,3) sind somit 1 und 17.

17.2 Die Form (2,2,3,5) hat genau zwei Ausnahmewerte.

Beweis. Nach 4.5 stellt f = (2,2,3) alle Zahlen $\notin N = \{3^{2k+1}(3q+2), 8q+1\}$ dar.

a) Darstellung der Zahlen $m = 3^{2k+1}(3q+2)$: Mit $t \not\equiv 0\ (3)$ wird $3^{2k+1}(3q+2) - 5t^2 \equiv 1\ (3)$. Die Annahme $m_1 = m-5 \equiv 1\ (8)$, $m_2 = m - 5.2^2 \equiv 1\ (8)$ führt zum Widerspruch $15 \equiv 0\ (8)$. Ist also $m \geq 20$, so stellt f m_1 oder m_2 dar. Zu untersuchen sind noch die Zahlen $m = 8q_1+6 < 20$: 6 wird von (2,2,3,5) ausgelassen.

b) Darstellung der Zahlen 8q+1 : Die Werte $m_3 = 8q+1-5$ bzw. $m_4 = 8q+1 - 5.3^2$ sind inkongruent 1 mod 8. Die Annahme $m_3 = 3^{2k+1}(3q+2)$, $m_4 = 3^{2k'+1}(3q'+2)$ führt zum Widerspruch $3 \mid 40$. Ist somit $8q+1 \geq 45$, so nimmt f eine der Zahlen m_3, m_4 an.

1) $8q+1 < 5$: 1 wird von (2,2,3,5) ausgelassen.

2) $8q+1 = 5 + 3^{2k+1}(3\bar{q}+2) < 45$: solche Zahlen gibt es nicht.

Damit stellt (2,2,3,5) alle Zahlen $\neq 1,6$ dar.

17.3 Die Gleichungen $m-3 = 9^k(18q+12)$, $m-27 = 9^{k'}(18q'+12)$ können nur zusammen bestehen für $k \geq 1$, $k' = 0$. Dann ist aber $m-75 = 9^{k''}(18q''+12)$ unmöglich.

Beweis. Aus den Voraussetzungen folgt $24 = 9^k(18q+12) - 9^{k'}(18q'+12)$

17.3-1 $\qquad 4 = 9^k(3q+2) - 9^{k'}(3q'+2)$.

a) $k = 0$ bedingt $k' = 0$ und damit $4 \equiv 0\ (3)$, folglich ist

b) $k > 0$, dann ist $k' = 0$ und aus 17.3-1 folgt $6 = 9^k(3q+2) - 3q'$. Die Voraussetzungen $m-3 = 9^k(18q+12)$, $m-27 = 9^{k'}(18q'+12)$ bedingen somit $m = 3 + 9^k(18q+12)$ mit $k \geq 1$. Angenommen, es sei zudem $m - 3.5^2 = 9^{k''}(18q''+12)$, dann ist $9^k(18q+12) - 9^{k''}(18q''+12) = 72$. Da $k \geq 1$ ist, so folgt $k'' \geq 1$, $9^{k-1}(18q+12) - 9^{k''-1}(18q''+12) = 8$ und daraus $8 \equiv 0\ (3)$.

17.4 Die Form (2,2,3,6) stellt alle Zahlen $\neq 1,15$ dar.

Beweis. Die Form $f = (2,2,6)$ stellt nach 9.10 alle Zahlen dar $\notin N = \{2q+1,\ 9^k(18q+12)\}$.

a) Darstellung gerader Zahlen $\in N$: Mit $z = 2.3^k$ wird $9^k(18q+12) - 3.4.9^k = 9^{k+1}.2q$ für $q \neq 9^{k'}(9q'+6)$ von f dargestellt. Hat q die Gestalt $9^{k'}(9q'+6)$, so nimmt f den Wert $9^k(18q+12) - 3.4^2.(3^k)^2 = 9^{k+1}(2q-4)$ an, da $2q-4 \neq 0\ (3)$ ist. Damit stellt (2,2,3,6) alle geraden Zahlen dar.

b) Darstellung ungerader Zahlen m : Ist $m \geq 27$ und $m \neq 3 + 9^k(18q+12)$ mit $k \geq 1$, so wird nach 17.3 $m-3$ bzw. $m - 3.3^2$ von f angenommen. Gilt $m = 3 + 9^k(18q+12)$ $(k \geq 1)$, so ist $m \geq 111$ und $m - 3.5^2$ ist nach 17.3 $\notin N$. Zu untersuchen sind noch die Werte

1) $m < 3$: 1 wird von (2,2,3,6) ausgelassen.

2) $m = 3 + 9^k(18q+12) < 27$: 15 wird ebenfalls von (2,2,3,6) ausgelassen.

Folglich nimmt (2,2,3,6) alle Werte an $\neq 1$ und 15.

17.5 Die Form (2,3,3,4) stellt alle Zahlen $\neq 1,13$ dar.

Beweis. Nach 5.4 stellt $f = (2,3,3)$ alle Zahlen $\notin N = \{3^{2k}(3q+1)\}$ dar. Mit $t = 3^k$ wird $3^{2k}(3q+1) - 4.3^{2k} = 3^{2k}(3(q-1))$ von f angenommen, falls $q \neq 1 + 3^{2k'}(9q'+3)$ und $q \geq 1$ ist. Für $q = 1 + 3^{2k'}(9q'+3)$ mit $q > 4$ kann $t = 2.3^k$ gewählt werden; dann ist $3^{2k}(3q+1) - 4.4.3^{2k} = 3^{2k}(3(q-5)) \notin N$, da $q-5 \equiv 2\ (3)$ ist. Zu betrachten sind somit noch die Werte 3^{2k}, $3^{2k}.13$. Gilt dabei $k \geq 1$, so ergibt sich mit $t = 3^{k-1}$ $m_1 = 3^{2k} - 4.3^{2k-2} = 3^{2k-2}(3+2) \notin N$ und $m_2 = 3^{2k}.13 - 4.3^{2k-2} = 3^{2k-2}(3.37+2) \notin N$. Im Falle $k = 0$ erhält man die Zahlen 1 und 13, die somit die einzigen Ausnahmewerte von (2,3,3,4) sind.

§ 18. Die Formen 10.6-24.

18.1 Die Gleichungen $m-3 = 4^k(8q+5)$, $m - 3.3^2 = 4^{k'}(8q'+5)$ $(k > 0,$ $k' > 0)$ können nicht zusammen bestehen.

Beweis. Aus den Voraussetzungen folgt $24 = 4^k(8q+5) - 4^{k'}(8q'+5)$ und $6 = 4^{k-1}(8q+5) - 4^{k'-1}(8q'+5)$.

a) $k = 1$ hat auch $k' = 1$ zur Folge und man erhält $6 = 8(q-q')$

b) $k > 1$ bedingt $k' > 1$, dann ist jedoch $6 \equiv 0\ (4)$.

18.2 Die Form (2,3,4,4) stellt jede Zahl $\neq 1,17$ dar.

Beweis. Die ternäre Teilform $f = (2,4,4)$ stellt nach 9.10 jede Zahl dar $\notin N = \{2q+1,\ 4^k(16q+14)\}$. Da f dieselben Ausnahmezahlen hat wie (2,2,2) und der vierte Koeffizient 3 ist wie in 17.1, so kann der Beweis von 17.1 auf 18.2 übertragen werden.

18.3 Die Form (2,3,4,6) stellt jede Zahl $\neq 1,23$ dar.

Beweis. Nach 9.10 stellt $f = (2,4,6)$ alle Zahlen $\notin N = \{2q+1,\ 4^k(8q+5) \mid k>0\}$ dar.

a) Die Form (1,2,3,6) ist universell; zu jedem n gibt es somit Zahlen x,z,t,v, so dass $n = x^2+2z^2+3t^2+6v^2$ gilt. Daraus folgt $2n =$

$= 2x^2+3(2v)^2+4z^2+6t^2 = 2x^2+3y^2+4z^2+6t^2$ mit $y = 2v$. (2,3,4,6) nimmt somit jede gerade Zahl an.

b) Ist m eine ungerade Zahl, so ist nach 18.1 eine der Zahlen $m-3$, $m - 3.3^2$ durch f darstellbar für $m \geq 27$. Zu untersuchen sind somit noch die Zahlen

1) $m < 3$: 1 wird von (2,3,4,6) ausgelassen.

2) $m = 3 + 4^k(8q+5)$ $(k > 0)$, $m < 27$: 23 wird ebenfalls durch (2,3,4,6) ausgelassen.

Somit hat (2,3,4,6) nur die Ausnahmewerte 1 und 23.

<u>18.4</u> Die Form (2,3,4,7) stellt jede Zahl $\neq 1,17$ dar.

Beweis. a) Darstellung gerader Zahlen : Die Form $f = (2,3,4)$ stellt nach 8.9 jede gerade Zahl $\notin N = \{4^k(16q+10)\}$ dar. Ist $m = 4^k(16q+10)$ mit $k > 0$ und wählt man $t = 2^k$, so wird $4^k(16q+10) - 7.4^k = 4^k(16q+3)$ von f angenommen. Für die Zahlen $16q+10$ mit $q \geq 2$ kann $t = 2$ gesetzt werden, dann ist $16q+10 - 7.2^2 = 16(q-2)+14 \notin N$. Da $10 = 3.1^2+7.1^2$ und $26 = 3.1^2+4.2^2+7.1^2$ ist, so stellt (2,3,4,7) jede gerade Zahl dar.

b) Darstellung ungerader Zahlen : Nach 8.3 stellt $g = (3,4,7)$ jede Zahl $4n+3 \notin N = \{3^{2k+1}(3q+2)\}$ dar.

1) Zahlen $4n+3 \in N$: Da $3^{2k+1}(3q+2) - 2.2^2 \not\equiv 0$ (3) und $7 \equiv 3^{2k+1}(3q+2)-2.2^2 \equiv$ $\equiv 3$ (4) gilt, so nimmt (2,3,4,7) jeden Wert $4n+3$ an.

2) Zahlen $m = 4n+1$: Es ist $m - 2x^2 \equiv 3$ (4) für ungerades x. Aus der Annahme, es sei $m-2 \in N$ und $m - 2.3^2 \in N$ folgt $3 \mid 16$. Somit nimmt g für $m \geq 18$ eine der Zahlen $m-2, m-18$ an.

A) $m < 2$: 1 wird von (2,3,4,7) ausgelassen.

B) $m = 2 + 3^{2k+1}(3q+2) < 18$: 17 wird ebenfalls von (2,3,4,7) nicht dargestellt.

Damit hat (2,3,4,7) nur die Ausnahmewerte 1 und 17.

Anmerkung: Der Beweis von b) kann auch unter Verwendung der Form $f = (2,3,4)$ nach 13.1 geführt werden.

18.5 Die Form (2,3,4,10) stellt alle Zahlen $\neq 1,23$ dar.

Beweis. $f = (2,4,10)$ stellt nach 9.10 jede Zahl $\text{dar} \notin N = \{2q+1,\ 5^{2k+1}(10q+e) \mid e = 4,6\}$.

a) Die Form (1,2,5,6) ist universell; zu jedem n gibt es Werte x,z,t,v, so dass $n = x^2+2z^2+5t^2+6v^2$ gilt. Dann wird $2n = 2x^2+3(2v)^2+4z^2+10t^2 = 2x^2+3y^2+4z^2+10t^2$ mit $y = 2v$. (2,3,4,10) nimmt damit jeden Wert 2n an.

b) Ist m eine ungerade Zahl, so folgt aus $m-3 = 5^{2k+1}(10q+e)$, $m = 3.3^2 = 5^{2k'+1}(10q'+e')$ $(e' = 4,6)$ der Widerspruch $5 \mid 24$. Falls somit $m \geq 27$ ist, so stellt f eine der Zahlen m-3, m-27 dar.

1) $m < 3$: 1 wird von (2,3,4,10) ausgelassen

2) $m = 3 + 5^{2k+1}(10q+e) < 27$: 23 ist ebenfalls Ausnahmewert von (2,3,4,10).

Die Form (2,3,4,10) stellt damit alle Zahlen $\neq 1,23$ dar.

18.6 Die Form (2,3,4,11) stellt jede Zahl $\neq 1,10$ dar.

Beweis. Die Form $f = (2,3,4)$ stellt nach 8.9 jede gerade Zahl $\notin N = \{4^k(16q+10)\}$ dar.

a) Darstellung gerader Zahlen $m \in N$: Ist $m = 4^k(16q+10)$ mit $k > 0$ und $q \geq 1$, so kann $t = 2^k$ gewählt werden: $4^k(16q+10) - 11.4^k = 4^k(16(q-1)+15)$ wird von f angenommen. Bei den Werten $4^k.10$ mit $k \geq 2$ setze man $t = 2^{k-1}$, dann ist $4^k.10 - 11.4^{k-1} = 4^{k-1}(16+13) \notin N$. $k = 0$ ergibt den Ausnahmewert 10 von (2,3,4,11) und die Zahl 40 wird nicht ausgelassen : $40 = 2.1^2+3.3^2+11.1^2$. Für die Zahlen 16q+10 mit $q \geq 3$ wähle man $t = 2$, es ergibt sich $16q+10 - 11.2^2 = 16(q-3)+14 \notin N$. Da $26 = 2.2^2+3.1^2+4.1^2+11.1^2$ und $42 = 3.3^2+4.1^2+11.1^2$ gilt, so stellt (2,3,4,11) alle geraden Zahlen ausser 10 dar.

b) Darstellung ungerader Zahlen m : Nach 13.1 nimmt f eine der Zahlen $m-11$, $m = 11.3^2$ für $m \geq 99$ an, falls $m \neq 11 + 4^k(16q+10)$ mit $k \geq 3$ ist. Hat m die Gestalt $11 + 4^k(16q+10)$ mit $k \geq 3$, so ist $m \geq 651$ und f stellt nach 13.2 $m = 11.5^2$ dar. Zu untersuchen sind noch die Zahlen

1) $m < 11$: $3 = 3.1^2$, $5 = 2.1^2+3.1^2$, $7 = 3.1^2+4.1^2$, $9 = 2.1^2+3.1^2+4.1^2$

1 wird von (2,3,4,11) ausgelassen.

2) $m = 11 + 4^k(16q+10) < 99 : 21 = 2.3^2+3.1^2$, $37 = 2.3^2+3.1^2+4.2^2$, $51 = 3.1^2+4.1^2+11.2^2$, $53 = 2.1^2+3.1^2+4.1^2+11.2^2$, $69 = 2.3^2+3.1^2+4.1^2+11.2^2$, $85 = 2.1^2+3.1^2+4.3^2+11.2^2$.

Die Form (2,3,4,11) hat damit nur die Ausnahmewerte 1 und 10.

§ 19. Die Form (1,3,5,7).

19.1 Jede Zahl 4n, 4n+1, 4n+3 wird von (1,3,5,7) angenommen.

Beweis. Nach 7.2 stellt f = (1,3,5) alle Zahlen 4n, 4n+1 dar $\notin N = \{5^{2k+1}(5q+e) \mid e = 2,3\}$.

a) Zahlen $4n \in N$: Für $m_1 = 4n-7 = 5^{2k+1}(5q+e)-7$ gilt : $m_1 \equiv 1\ (4)$, $m_1 \not\equiv 0\ (5)$ und $m_1 \geq 3$, daher wird m_1 durch f angenommen.

b) Zahlen $4n+1 \in N$: Man erhält für $m_2 = 4n+1 - 7.2^2 = 5^{2k+1}(5q+e)-7.2^2$: $m_2 \equiv 1\ (4)$, $m_2 \not\equiv 0\ (5)$ und $m_2 \geq 37$; die Form f stellt daher den Wert m_2 dar.

c) Zahlen $m = 4n+3$: Es ist $m - 7t^2 \equiv 3 - 3t^2 \equiv 0\ (4)$ für ungerades t. Die Annahme $m-7 = 5^{2k+1}(5q+e)$, $m - 7.3^2 = 5^{2k'+1}(5q'+e')$ $(e' = 2,3)$ führt zum Widerspruch $5 \mid 56$. Ist somit $m \geq 63$, so wird eine der beiden Zahlen m-7, m-63 von f angenommen. Zu untersuchen sind noch die Werte

1) $m = 4n+3 < 7 : 3 = 3.1^2$

2) $m = 4n+3 = 7 + 5^{2k+1}(5q+e) < 63 : 47 = 4^2+3.1^2+7.2^2$.

19.2 Über die Zahlen 4n+2 lässt sich nichts aussagen, denn über eine Darstellung der Zahlen 4n+3, 4n+2 durch f liegen keine Aussagen vor, da f nicht regulär ist. Benutzt man anstelle von f die ebenfalls nicht reguläre Teilform g = (1,3,7), so lassen sich auch so die Aussagen 19.1 mit Hilfe von 7.3 gewinnen. Aussagen über die Zahlen 4n+2 konnte ich jedoch auch so nicht erreichen, da g in den Progressionen 4n+2,4n+1 weitere Ausnahmewerte hat, die nicht 3.9 genügen, z.B. 2,5. Jede weitere ternäre Teilform aus (1,3,5,7) ist ebenfalls nicht regulär : Nach 3.9 hat die Teilform $h_1 = (1,5,7)$ die Ausnahmeprogressionen $5^{2k+1}(5q+e)$ $(e = 2,3)$;

h_1 hat aber in den noch zu betrachtenden Progressionen 4n+2, 4n+3 weitere Ausnahmewerte: z.B. 2,3. Die Teilform $h_2 = (3,5,7)$ hat die Ausnahmeprogressionen $7^{2k+1}(7q+e)$ $(e = 3,5,6)$; von den Werten 4n+2, 4n+1 werden aber z.B. 1 und 2 nicht dargestellt.

In diesem Paragraphen sollen nun noch einige Aussagen über Zahlen, die durch (1,3,5,7) darstellbar sind, hergeleitet werden.

19.3 Jede Zahl 3n, 3n+1 $\neq 22$ wird durch (1,3,5,7) dargestellt.

Beweis. Nach 7.2 stellt $f = (1,3,5)$ jede Zahl $3n \notin N = \{5^{2k+1}(5q+e) \mid e = 2,3\}$ dar.

a) Zahlen $3n \in N$: Für $t = 3$ wird $m_1 = 5^{2k+1}(5q+e) - 7 \cdot 3^2$ von f dargestellt, sofern $m_1 \geq 0$ ist, da $m_1 \equiv 0\ (3)$ und $m_1 \not\equiv 0\ (5)$ gilt. Zu untersuchen sind noch die Zahlen $3n = 5^{2k+1}(5q+e) < 63 : 15 = 3.1^2+5.1^2+7.1^2$, $60 = 3.4^2+5.1^2+7.1^2$.

b) Zahlen $m = 3n+1$: Ist $m \geq 28$, so stellt f eine der Zahlen $m - 7$, $m - 7.2^2$ dar, da die Annahme $m - 7 \in N$, $m - 7.2^2 \in N$ zum Widerspruch $5 \mid 21$ führt. Zu betrachten sind noch die Zahlen

1) $m < 7 : 1 = 1^2, 4 = 2^2$

2) $m = 7 + 5^{2k+1}(5q+e) < 28 : 22$ wird von (1,3,5,7) ausgelassen.

19.4 Jede Zahl 7n, 7n+3, 7n+5, 7n+6 wird von (1,3,5,7) angenommen.

Beweis. Nach 7.3 stellt $f = (1,3,7)$ alle Zahlen $7n \notin N = \{3^{2k+1}(3q+2)\}$ dar.

a) Zahlen $7n \in N$: Da $m_1 = 3^{2k+1}(3q+2) - 5.7^2 \not\equiv 0\ (3)$ und $m_1 \equiv 0\ (7)$ ist, so wird m_1 für $m_1 \geq 0$ von f angenommen. Zu untersuchen sind noch die Werte $3^{2k+1}(3q+2) < 245$. Diese werden nach 19.7 durch (1,3,5,7) dargestellt.

b) Für die Untersuchung der Werte $m_\mu = 7n+n_\mu$ $(n_1 = 3, n_2 = 5, n_3 = 6)$ werden Zahlen $z_{\mu\nu}$ definiert:

ν \ μ	1	2	3
1	3	1	2
2	4	6	9

Werte $z_{\mu\nu}$

Mit diesen Werten ist $7n+n_\mu - 5z_{\mu\nu}^2 \equiv 0\ (7)$.

Die Annahme $m_\mu - 5z_{\mu 1}^2 \in N$, $m_\mu - 5z_{\mu 2}^2 \in N$ bedingt $3|5(z_{\mu 2}^2 - z_{\mu 1}^2)$; nach Wahl der Werte $z_{\mu\nu}$ ist jedoch $z_{\mu 2} - z_{\mu 1} \not\equiv 0\ (3)$, $z_{\mu 2} + z_{\mu 1} \not\equiv 0\ (3)$. Ist somit $m_\mu \geq 5z_{\mu 2}^2$, so wird $m_\mu - 5z_{\mu 1}^2$ oder $m_\mu - 5z_{\mu 2}^2$ durch f angenommen. Zu untersuchen sind noch die Werte

1) $m_\mu < 5z_{\mu 1}^2$

2) $m_\mu = 5z_{\mu 1}^2 + 3^{2k+1}(3q+2) < 5z_{\mu 2}^2$.

Nach 19.7 werden alle diese Werte von (1,3,5,7) dargestellt.

Anmerkung: Die Aussage 19.4 kann auch mit Hilfe von 8.4 bewiesen werden.

19.5 Ist $m \neq 5^{2k}(5q+e)$ $(e = 2,3)$, so wird m von (1,3,5,7) angenommen.

Beweis. Ist $m = 5^{2k}(5q+e)$, so wird m nach 5.5 von (1,5,10) dargestellt. Aus $m = x^2+5y^2+10z^2$ folgt $m = x^2+3z^2+5y^2+7z^2$.

19.6 Die ternaren Teilformen von (1,3,5,7) sind irregulär, sie haben in den Progressionen 3n+v, 5n+v, 7n+v, die zur völligen Lösung der Frage nach den Ausnahmewerten von (1,3,5,7) herangezogen werden müssen, noch weitere Ausnahmewerte als die nach 3.9 bedingten.

In folgender Tabelle ist für jede Teilform und jede Progression ein weiterer Ausnahmewert angegeben. Wird in dieser Tabelle auf einen Abschnitt dieser Arbeit verwiesen, so besagt dies, die Form ist für diese Progression regulär und der Beweis findet sich an der angegebenen Stelle. Die Striche bei manchen Progressionen bedeuten, dass selbst eine Regularität der Form in bezug auf diese Progressionen nichts zur Lösung des Problems beitragen würde. Die Teilformen von (1,3,5,7) sind wie folgt bezeichnet: $f = (1,3,5)$, $g = (1,3,7)$, $h_1 = (1,5,7)$, $h_2 = (3,5,7)$.

	3n	3n+1	3n+2	5n	5n+1	5n+2	5n+3	5n+4	7n	7n+1	7n+2	7n+3	7n+4	7n+5	7n+6
f	7.2	22	11	50	11	2	38	34	-	22	170	-	11	-	-
g	45	22	2	5	-	2	18	-	7.3	22	30	17	18	5	62
h_1	3	19	2	50	26	2	3	19	8.4	22	2	3	18	19	55
h_2	6	1	2	25	1	2	13	4	14	22	2	38	4	26	6

19.7 Herr Prof. Dr. Zeller gestattete mir freundlicherweise, die Form (1,3,5,7) mit Hilfe des Siemens - Digitalrechners 2002 numerisch auf Aus-

nahmewerte zu untersuchen. Es ergab sich, daß die Form (1,3,5,7) jeden Wert $m < 40\,000$, $m \neq 2,22$ annimmt.

19.8 Zusammenfassend kann somit gesagt werden: Die noch möglichen Ausnahmewerte von (1,3,5,7) liegen in folgenden Progressionen: $84n+2$, $84n+50$, $84n+74$ und müssen noch von der Gestalt $5^{2k}(5q+e)$ $(e = 2,3)$ sein. Ferner können unterhalb von 40 000 keine Ausnahmewerte außer 2 und 22 auftreten.

§ 20. Zusammenstellung.

Aus den Ergebnissen der §§ 10 - 19 erhält man:

20.1 Es gibt mindestens 126 Formen mit genau zwei Ausnahmewerten und es gibt höchstens 127 solcher Formen. Die 126 Formen, die alle Zahlen außer zweien annehmen, sind in folgender Tabelle mit ihren Ausnahmewerten zusammengestellt:

a	b	c	d	Ausnahmewerte
1	1	1	11	7 39
			13	7 28
			17 18 20 22 23	7 15
1	1	2	22	14 78
			26	14 56
			31 33 34 35 36	14 30
			37 39 40 41 43	14 30
			44 45 46	14 30
1	1	3	16 17 19	6 15
			20 22 23	6 15
1	1	4	7	3 35
			10	3 7
1	1	5	7	3 19
			9	3 12
			12	3 11
1	1	6	12	3 39
			13 14 16	3 12
			17 19 20	3 12
1	2	2	11	7 39
			13	7 28
			17 18 20 22 23	7 15
1	2	3	14	10 40
			18	10 58
			27 28 29 31 33	10 26
			35 36 37 38 39	10 26
			40	10 26
1	2	4	22	14 78
			26	14 56
			31 33 34 35 36	14 30
			37 39 40 41 43	14 30
			44 45 46	14 30
1	2	5	16 17 18 19 21	10 15
			22 23 24 26 27	10 15
			28 29 31 32 33	10 15
			34	10 15
1	2	6	7	5 20
			9	5 29
			14 18 19 20	5 13
1	2	7	9 17 18 19 20	5 14
1	2	8	9 12	5 7
1	2	9	10 11 13 14	5 7
1	2	10	12	5 7

a	b	c	d	Ausnahmewerte		a	b	c	d	Ausnahmewerte	
1	3	4	6	2	30	2	2	3	5	1	6
1	3	5	8	2	10				6	1	15
1	4	5	6	2	3	2	3	3	4	1	13
1	4	6	7 8 11	2	3	2	3	4	4	1	17
1	5	6	7 8	2	3				6	1	23
2	2	2	3	1	17				7	1	17
									10	1	23
									11	1	10

Die noch übrig bleibende Form (1,3,5,7) wird in § 19 behandelt.

IV. FASTUNIVERSELLE FORMEN MIT GENAU DREI AUSNAHMEWERTEN.

§ 21. Notwendige Bedingungen für $F = ax^2+by^2+cz^2+dt^2$.

21.1 Wie in 10.3 und 10.4 werden zunächst notwendige Bedingungen aufgestellt, denen die Koeffizienten a,b,c,d genügen müssen, damit F möglicherweise drei Ausnahmewerte besitzt. Das Verfahren werde an zwei Beispielen vorgeführt:

Die Form $f = (1,1,1)$ stellt alle Zahlen $\neq \{4^k(8q+7)\}$ dar. Die vier kleinsten Ausnahmewerte von f sind demnach 7,15,23,28. Ist $d \leq 7$, so sind die Formen (1,1,1,d) nach Ramanujan universell. Für d = 9,10,12,14,15 ergeben sich Formen mit genau einem Ausnahmewert (Halmos (18)) und mit d = 11,13, 17,18,20,22,23 erhält man Formen, die genau zwei Werte auslassen (11.2). Die noch verbleibenden Formen (1,1,1,d) mit $d < 23$ nehmen sicher drei Zahlen nicht an. Ist aber $d > 28$, so haben die Formen (1,1,1,d) schon vier Ausnahmewerte. Die Formen mit genau drei Ausnahmewerten sind somit unter den Formen (1,1,1,d) mit d = 8,16,19,21,24 $\leq d \leq 28$ enthalten.

Die Form $g = (1,1,2)$ stellt alle Zahlen $\neq \{4^k(16q+14)\}$ dar. Man erhält damit die vier kleinsten Ausnahmewerte 14,30,46,56. Ist $d \leq 14$, so ist (1,1,2,d) nach Ramanujan universell. Halmos zeigte, dass die Formen (1,1,2,d) für d = 15,17 $\leq d \leq$ 21,23,24,25,27,28,29,30 nur einen Wert auslassen. In 11.3 wurde bewiesen, dass man mit d = 22,26,31,33 $\leq d \leq$ 37,39,40,41,43,44, 45,46 Formen mit genau zwei Ausnahmewerten erhält. Falls aber $d > 56$ ist, so nehmen die Formen (1,1,2,d) die Werte 14,30,46,56 nicht an. Damit sind noch zu untersuchen die Formen, die sich mit d = 16,32,38,42,47 $\leq d \leq 56$ ergeben.

21.2 Die weiteren Untersuchungen zum Auffinden notwendiger Bedingungen für a,b,c,d sind in folgender Tabelle zusammengestellt:

a	b	c	kleinste AW von f	univ. Form.	Formen m. 1 AW	Formen m. 2 AW	notw. Bed. für d	kleinste AW von F	Anzahl
1	1	1	7 15 23 28	1 2 3 4 5 6 7	9 10 12 14 15	11 13 17 18 20 22 23	8 16 19 21 24 ≤ d ≤ 28	7 15 23 7 15 23 7 15 47 7 15 28 7 15 23	9
1	1	2	14 30 46 56	2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14	15 17 18 19 20 21 23 24 25 27 28 29 30	22 26 31 33 34 35 36 37 39 40 41 43 44 45 46	16 32 38 42 47 ≤ d ≤ 56	14 30 46 14 30 46 14 30 94 14 30 56 14 30 46	14
1	1	3	6 15 24 33	3 4 5 6	7 8 10 11 13 14 15	16 17 19 20 22 23	9 12 18 21 24 25 ≤ d ≤ 33	6 15 24 6 54 486 6 15 24 6 15 54 6 15 78 6 15 24	14
1	1	4	3 7 11 15	-	5 6	7 10	4 8 9 11 12 ≤ d ≤ 15	3 7 11 3 7 11 3 7 28 3 7 39 3 7 11	8
1	1	5	3 11 12 19	-	5 6 10 11	7 9 12	8 13 ≤ d ≤ 19	3 11 19 3 11 12	8
1	1	6	3 12 21 27	-	7 8 10 11	12 13 14 16 17 19 20	6 9 15 18 21 22 ≤ d ≤ 27	3 27 243 3 12 21 3 12 27 3 12 21 3 12 48 3 12 21	11
1	1	7	3 6 14 19	-	-	-	7 8 9 10 11 12 13 14 15 ≤ d ≤ 19	3 6 21 3 6 14 3 6 31 3 6 31 3 6 14 3 6 31 3 6 19 3 6 35 3 6 14	13
1	1	8	3 6 7 11	-	-	-	8 ≤ d ≤ 11	3 6 7	4
1	1	9	3 6 7 12	-	-	-	9 ≤ d ≤ 12	3 6 7	4
1	1	10	3 6 7 21	-	-	-	10 ≤ d ≤ 21	3 6 7	12
1	1	11	3 6 7 14	-	-	-	11 ≤ d ≤ 14	3 6 7	4
1	1	12	3 6 7 11	-	-	-	-	-	-

a	b	c	kleinste AW von f	univ. Form.	Formen m. 1 AW	Formen m. 2 AW	notw. Bed. für d	kleinste AW von F	Anzahl
1	2	2	7 15 23 28	2 3 4 5 6 7	9 10 12 14 15	11 13 17 18 20 22 23	8 16 19 21 24 ≤ d ≤ 28	7 15 23 7 15 23 7 15 47 7 15 28 7 15 23	9
1	2	3	10 26 40 42	3 4 5 6 7 8 9 10	11 12 13 15 17 19 20 21 22 23 24 25 26	14 18 27 28 29 31 33 35 36 37 38 39 40	16 30 32 34 41 42	10 26 42 10 26 40 10 26 42 10 26 74 10 26 40	6
1	2	4	14 30 46 56	4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14	15 17 18 19 20 21 23 24 25 27 28 29 30	22 26 31 33 34 35 36 37 39 40 41 43 44 45 46	16 32 38 42 47 ≤ d ≤ 56	14 30 46 14 30 46 14 30 94 14 30 56 14 30 46	14
1	2	5	10 15 35 40	6 7 8 9 10	5 11 12 13 14	16 17 18 19 21 22 23 24 26 27 28 29 31 32 33 34	15 20 25 30 35 36 ≤ d ≤ 40	10 25 0 625 0 10 15 35 10 15 35 10 15 40 10 15 25 0 10 15 35	10
1	2	6	5 13 20 21	-	6 10 11 12 13	7 9 14 18 19 20	8 15 16 17 21	5 13 21 5 13 20 5 13 21 5 13 37 5 13 20	5
1	2	7	5 14 20 21	-	8 10 11 12 13	9 17 18 19 20	7 14 15 16 21	5 21 42 5 35 245 5 14 20 5 14 21 5 14 20	5
1	2	8	5 7 13 15	-	-	9 12	8 10 11 13 14 15	5 7 13 5 7 15 5 7 39 5 7 28 5 7 13	6
1	2	9	5 7 14 23	-	-	10 11 13 14	9 12 15 ≤ d ≤ 23	5 7 14 5 7 35 5 7 14	11
1	2	10	5 7 15 20	-	-	12	10 11 13 14 15 16 ≤ d ≤ 20	5 7 15 5 7 31 5 7 20 5 7 45 5 7 20 5 7 15	10

a	b	c	kleinste AW von f	univ. Form.	Formen m. 1 AW	Formen m. 2 AW	notw. Bed. für d	kleinste AW von F	A za
1	2	11	5 7 10 21	-	-	-	11 ≤ d ≤ 21	5 7 10	1
1	2	12	5 7 10 26	-	-	-	12 ≤ d ≤ 26	5 7 10	1
1	2	13	5 7 10 20	-	-	-	13 ≤ d ≤ 20	5 7 10	
1	2	≥14	5 7 10 13	-	-	-	-	-	
1	3	3	2 5 8 11	-	5	-	3	2 5 8	
							4	2 18 162	
							6	2 5 8	
							7	2 5 18	
							8	2 5 26	
							9 10 11	2 5 8	
1	3	4	2 6 10 14	-	-	6	4	2 6 10	
							5	2 15 38	
							7	2 6 22	
							8	2 6 10	
							9	2 6 15	
							10	2 6 24	
							11 ≤ d ≤ 14	2 6 10	1
1	3	5	2 10 11 15	-	6	8	5	2 15 55	
							9 4)	2 11 74	
							10	2 50 1250	
							11	2 10 22	
							12 ≤ d ≤ 15	2 10 11	
1	3	6	2 5 8 11	-	-	-	6	2 5 8	
							7	2 5 30	
							8	2 5 46	
							9 10 11	2 5 8	
1	3	7	2 5 6 15	-	-	-	7 ≤ d ≤ 15	2 5 6	
1	3	8	2 5 6 10	-	-	-	8 9 10	2 5 6	
1	3	≥9	2 5 6 8	-	-	-	-	-	
1	4	4	2 3 6 7	-	-	-	4	2 3 6	
							5	2 3 7	
							6	2 3 34	
							7	2 3 6	
1	4	5	2 3 7 11	-	-	6	5	2 3 7	
							7	2 3 19	
							8 ≤ d ≤ 11	2 3 7	
1	4	6	2 3 12 18	-	-	7 8 11	6	2 3 18	
							9	2 3 12	
							10	2 3 12	
							12	2 3 30	
							13 ≤ d ≤ 18	2 3 12	

a	b	c	kleinste AW von f	univ. Form.	Formen m. 1 AW	Formen m. 2 AW	notw. Bed. für d	kleinste AW von F	Anzahl
1	4	7	2 3 6 10	-	-	-	7 ≤ d ≤ 10	2 3 6	4
1	4	≥8	2 3 6 7	-	-	-	-	-	-
1	5	5	2 3 7 8	-	-	-	5	2 3 7	
							6	2 3 8	
							7	2 3 15	
							8	2 3 7	4
1	5	6	2 3 8 13	-	-	7 8	6	2 3 8	
							9 ≤ d ≤ 13	2 3 8	6
1	5	7	2 3 10 15	-	-	-	7	2 3 10	
							8	2 3 10	
							9	2 3 19	
							10	2 3 50	
							11 ≤ d ≤ 15	2 3 10	9
1	5	8	2 3 7 10	-	-	-	8 9 10	2 3 7	3
1	5	≥9	2 3 7 8	-	-	-	-	-	-
1	6	6	2 3 5 8	-	-	-	6 7 8	2 3 5	3
1	6	7	2 3 5 12	-	-	-	7 ≤ d ≤ 12	2 3 5	6
1	6	8	2 3 5 11	-	-	-	8 ≤ d ≤ 11	2 3 5	4
1	6	≥9	2 3 5 8	-	-	-	-	-	-
1	≥7	≥7	2 3 5 6	-	-	-	-	-	-
2	2	2	1 3 5 7	-	-	3	2 4	1 3 5	
							5	1 3 14	
							6 7	1 3 5	5
2	2	3	1 6 9 15	-	4	5 6	3	1 9 81	
							7	1 6 24	
							8	1 6 9	
							9	1 6 15	
							10 ≤ d ≤ 15	1 6 9	10
2	2	4	1 3 5 7	-	-	-	4	1 3 5	
							5	1 3 33	
							6 7	1 3 5	4
2	2	5	1 3 6 11	-	-	-	5	1 3 6	
							6	1 3 12	
							7 ≤ d ≤ 11	1 3 6	7
2	2	6	1 3 5 7	-	-	-	6 7	1 3 5	2
2	2	≥7	1 3 5 6	-	-	-	-	-	-

a	b	c	kleinste AW von f	univ. Form.	Formen m. 1 AW	Formen m. 2 AW	notw. Bed. für d	kleinste AW von F	Anzahl
2	3	3	1 4 7 9	-	-	4	3	1 4 7	
							5	1 4 9	
							6	1 4 7	
							7	1 4 16	
							8 9	1 4 7	6
2	3	4	1 10 13 17	-	5 8	4 6 7	9	1 10 26	
						10 11	12	1 10 13	
							13	1 10 23	
							14 ≦ d ≦ 17	1 10 13	7
2	3	5	1 4 6 9	-	-	-	5	1 4 6	
							6	1 4 15	
							7 8 9	1 4 6	5
2	3	6	1 4 7 10	-	-	-	6	1 4 7	
							7	1 4 22	
							8 9 10	1 4 7	5
2	3	7	1 4 6 13	-	-	-	7 ≦ d ≦ 13	1 4 6	7
2	3	≧8	1 4 6 7	-	-	-	-	-	-
2	4	4	1 3 5 7	-	-	-	4	1 3 5	
							5	1 3 14	
							6 7	1 3 5	4
2	4	5	1 3 10 14	-	-	-	5	1 3 15	
							6	1 3 25	
							7	1 3 10	
							8	1 3 33	
							9	1 3 10	
							10	1 3 25	
							11 ≦ d ≦ 14	1 3 10	10
2	4	6	1 3 5 7	-	-	-	6 7	1 3 5	2
2	4	7	1 3 5 10	-	-	-	7 ≦ d ≦ 10	1 3 5	4
2	4	≧8	1 3 5 7	-	-	-	-	-	-
2	5	5	1 3 4 6	-	-	-	5 6	1 3 4	2
2	5	6	1 3 4 9	-	-	-	6 ≦ d ≦ 9	1 3 4	4
2	5	≧7	1 3 4 6	-	-	-	-	-	-
2	≧6	≧6	1 3 4 5	-	-	-	-	-	-
3	3	3	1 2 4 5	-	-	-	3	1 2 4	
							4	1 2 5	
							5	1 2 4	3

a	b	c	kleinste AW von f	univ. Form.	Formen m. 1 AW	Formen m. 2 AW	notw. Bed. für d	kleinste AW von F	Anzahl
3	3	4	1 2 5 8	-	-	-	4	1 2 5	
							5	1 2 13	
							6 7 8	1 2 5	5
3	3	5	1 2 4 7	-	-	-	5 6 7	1 2 4	3
3	3	≥6	1 2 4 5	-	-	-	-	-	-
3	4	4	1 2 5 6	-	-	-	4	1 2 5	
							5	1 2 6	
							6	1 2 5	3
3	4	5	1 2 6 10	-	-	-	5	1 2 6	
							6	1 2 35	
							7 8 9 10	1 2 6	6
3	4	6	1 2 5 8	-	-	-	6 7 8	1 2 5	3
3	4	≥7	1 2 5 6	-	-	-	-	-	-
3	5	5	1 2 4 6	-	-	-	5 6	1 2 4	2
3	5	6	1 2 4 7	-	-	-	6 7	1 2 4	2
3	5	≥7	1 2 4 6	-	-	-	-	-	-
3	≥6	≥6	1 2 4 5	-	-	-	-	-	-
4	4	4	1 2 3 5	-	-	-	4 5	1 2 3	2
4	4	5	1 2 3 6	-	-	-	5 6	1 2 3	2
4	4	≥6	1 2 3 5	-	-	-	-	-	-
4	5	5	1 2 3 6	-	-	-	5 6	1 2 3	2
4	5	6	1 2 3 7	-	-	-	6 7	1 2 3	2
4	5	≥7	1 2 3 6	-	-	-	-	-	-
4	≥6	≥6	1 2 3 5	-	-	-	-	-	-
≥5	≥5	≥5	1 2 3 4	-	-	-	-	-	-

Man erhält so 433 Formen, ohne die Form (1,3,5,7), unter denen sich alle die Formen befinden müssen, die alle Zahlen außer dreien darstellen.

21.3 Von den in 21.2 angegebenen 433 Formen lassen sich 336 Formen

ausscheiden, indem man von ihnen einen vierten Ausnahmewert aufzeigt. Diese Zahlen sind in folgender Tabelle zusammengestellt (AW bedeutet wieder Ausnahmewert):

a	b	c	d	4.AW
1	1	1	8	31
			16	31
			21	60
			24	31
			27	55
1	1	2	16	62
			32	62
			42	120
			48	62
			54	110
1	1	3	9	33
			12	4 374
			18	33
			21	135
			27	33
			30	54
			33	87
1	1	4	4	15
			8	15
			11	71
			12	15
			13	28
			15	43
1	1	5	8	27
			13	48
			15	27
			16	19
			17	44
			19	67
1	1	6	6	2 187
			9	30
			15	108
			18	30
			24	27
			27	30
1	1	7	7	42
			8	22
			11	42
			13	35
			14	147
			15	21
			16	19
1	1	7	17	31
			18	21
			19	22
1	1	8	8	11
			9	15
			11	14
1	1	9	9	12
			10	31
			11	23
			12	15
1	1	10	10	31
			11	33
			12	33
			14	21
			15	21
			16	22
			17	24
			18	21
			19	22
			20	87
			21	24
1	1	11	11	14
			12	35
			13	35
1	2	2	8	31
			16	31
			21	60
			24	31
			27	55
1	2	3	16	58
			30	104
			32	58
1	2	4	16	62
			32	62
			42	120
			48	62
			54	110
1	2	5	15	156 250
			20	60
			25	40
1	2	5	30	65
			35	375
			40	250
1	2	6	8	29
			15	52
			16	29
1	2	7	7	245
			14	1 715
			15	35
			21	35
1	2	8	8	15
			10	23
			14	21
			15	28
1	2	9	9	23
			15	29
			16	23
			17	46
			18	23
			19	65
			21	35
			22	29
			23	30
1	2	10	10	30
			14	119
			15	30
			16	23
			17	47
			18	23
			19	39
			20	125
1	2	11	11	21
			13	39
			14	21
			16	21
			18	39
			19	26
			21	26
1	2	12	12	47
			14	40
			16	26

a	b	c	d	4.AW
1	2	12	18	58
			19	26
			21	26
			23	58
			25	35
			26	103
1	2	13	13	20
			14	42
			15	20
			16	23
			18	23
			19	26
1	3	3	3	11
			4	1 458
			6	11
			7	45
			9	11
			10	18
			11	29
1	3	4	4	14
			7	58
			8	14
			9	24
			10	34
			11	26
			12	14
			13	15
			14	24
1	3	5	5	60
			10	31 250
			12	22
			13	15
			15	50
1	3	6	6	11
			9	11
			10	30
			11	41
1	3	7	7	22
			8	30
			9	15
			10	15
			11	17
			12	17
			13	15
			15	17
1	3	8	8	10
			9	14
			10	50
1	4	4	4	7
			5	11
			7	10
1	4	5	5	12
			7	26
			8	11
			9	11
			10	12
			11	23
1	4	6	6	27
			9	21
			12	39
			13	34
			14	48
			15	18
			16	18
			18	21
1	4	7	7	10
			8	10
			9	19
			10	31
1	5	5	5	8
			6	13
			7	22
			8	15
1	5	6	6	19
			9	17
			10	13
			11	13
			13	32
1	5	7	7	17
			8	18
			9	26
			10	75
			11	26
			12	15
			13	15
			14	17
			15	17
1	5	8	8	10
			9	11
			10	50
1	6	6	6	8
			7	18
			8	11
1	6	7	7	12
1	6	7	8	20
			9	12
			10	12
			11	30
			12	30
1	6	8	8	11
			9	11
			10	13
			11	13
2	2	2	2	7
			4	7
			5	19
			6	7
			7	14
2	2	3	3	729
			8	17
			9	24
			10	25
			11	17
			12	54
			14	15
			15	24
2	2	4	4	7
			6	7
			7	35
2	2	5	5	11
			6	17
			7	19
			8	11
			9	12
			10	11
			11	12
2	2	6	6	7
			7	12
2	3	3	3	10
			5	36
			6	10
			8	9
			9	10
2	3	4	13	26
			14	40
			15	55
			16	17
			17	40
2	3	5	5	9
			6	39

a	b	c	d	4.AW
2	3	5	7	43
			8	9
			9	15
2	3	6	6	10
			7	23
			8	15
			9	10
			10	23
2	3	7	7	13
			8	24
			9	13
			10	16
			11	17
			12	13
			13	17
2	4	4	4	7
			5	19
			6	7
			7	14
2	4	5	5	19
			9	19
			10	35
			11	14
			12	15
			13	14
			14	15

a	b	c	d	4.AW
2	4	6	6	7
			7	20
2	4	7	7	10
			8	35
			9	10
			10	20
2	5	5	5	6
			6	9
2	5	6	6	9
			7	10
			8	9
			9	10
3	3	3	3	5
			4	8
			5	7
3	3	4	4	9
			5	14
			6	8
			7	8
			8	9
3	3	5	5	7
			6	7
			7	9
3	4	4	4	6

a	b	c	d	4.AW
3	4	4	5	10
			6	15
3	4	5	5	11
			6	46
			7	13
			8	10
			9	10
			10	11
3	4	6	6	8
			7	8
			8	23
3	5	5	5	6
			6	7
3	5	6	6	7
			7	22
4	4	4	4	5
			5	6
4	4	5	5	6
			6	7
4	5	5	5	6
			6	7
4	5	6	6	7
			7	8

21.4 Damit verbleiben noch folgende 97 Formen, die weiter zu untersuchen sind:

	a	b	c	d
21.4-1	1	1	1	19 25 26 28
21.4-2	1	1	2	38 47 49 50 51 52 53 55 56
21.4-3	1	1	3	24 25 26 28 29 31 32
21.4-4	1	1	4	9 14
21.4-5	1	1	5	14 18
21.4-6	1	1	6	21 22 23 25 26
21.4-7	1	1	7	9 10 12
21.4-8	1	1	8	10
21.4-9	1	1	10	13
21.4-10	1	1	11	14
21.4-11	1	2	2	19 25 26 28
21.4-12	1	2	3	34 41 42
21.4-13	1	2	4	38 47 49 50 51 52 53 55 56
21.4-14	1	2	5	36 37 38 39
21.4-15	1	2	6	17 21
21.4-16	1	2	7	16

	a	b	c	d
21.4-17	1	2	8	11 13
21.4-18	1	2	9	12 20
21.4-19	1	2	10	11 13
21.4-20	1	2	11	12 15 17 20
21.4-21	1	2	12	13 15 17 20 22 24
21.4-22	1	2	13	17 20
21.4-23	1	3	3	8
21.4-24	1	3	4	5
21.4-25	1	3	5	9 11 14
21.4-26	1	3	6	7 8
21.4-27	1	3	7	14
21.4-28	1	4	4	6
21.4-29	1	4	6	10 17
21.4-30	1	5	6	12
21.4-31	2	2	3	7 13
21.4-32	2	2	4	5
21.4-33	2	3	3	7
21.4-34	2	3	4	9 12
21.4-35	2	4	5	6 7 8

§ 22. Die Formen 21.4-1,...,21.4-4.

22.1 Die Formen 21.4-1 haben genau drei Ausnahmewerte.

Beweis. Die Form $f = (1,1,1)$ stellt jede Zahl $\neq N = \{4^k(8q+7)\}$ dar.

a) Mit $t = 2^k$ wird $4^k(8q+7) - d.4^k = 4^k(8q+7-d)$ von f angenommen, falls $d \not\equiv 0\ (8)$, $d \not\equiv 3\ (4)$ und $8q+7-d \geq 0$ ist.

b) Wählt man $t = 2^{k-1}$, so wird für $k \geq 1$ die Zahl $4^k(8q+7) - d.4^{k-1} = 4^{k-1}(32q+28-d)$ durch f angenommen, falls $d \not\equiv 0\ (4)$, $d \not\equiv 5\ (8)$ ist.

Aus a) und b) folgt, dass die Formen (1,1,1,25) und (1,1,1,26) jede Zahl $\neq 7,15,23$ annehmen.

c) Nach b) sind für $d = 19$ nur noch die Werte $8q+7$ zu untersuchen. Ist $q \not\equiv 1\ (4)$ und $q \geq 2$, so wird $8q+7-19 = 8(q-2)+4 = 4(2(q-2)+1)$ durch f dargestellt. Im Falle $q \equiv 1\ (4)$, $q \geq 9$ läßt f die Zahl $8q+7 - 19.2^2 = 8(q-9)+3$ nicht aus. Somit hat (1,1,1,19) nur die Ausnahmewerte 7,15,47.

d) Für $d = 28$ sind nach a) nur noch die Werte $m = 4^k(8q+7)$ mit $q = 0,1,2$ zu betrachten. Bei den Zahlen m mit $k \geq 1$ kann $t = 2^{k-1}$ gewählt werden, denn es ist $m - 28.4^{k-1} = 4^k(8q+7) - 7.4^k = 4^{k+1}.2q \notin N$. Die noch verblei-

benden Werte m = 7,15,23 sind schon in 21.2 als Ausnahmewerte von (1,1,1,28) erkannt worden.

22.2 Die Formen 21.4-2 haben genau drei Ausnahmewerte.

Beweis. Da f = (1,1,2) jede Zahl $\notin N = \{4^k(16q+14)\}$ annimmt, so sind nur Zahlen der Gestalt $4^k(16q+14)$ zu betrachten.

a) Mit $t = 2^k$ wird $4^k(16q+14) - d.4^k = 4^k(16q+14-d)$ von f dargestellt, falls $16q+14-d \geq 0$ und $d \not\equiv 0\ (16)$, $d \not\equiv 2\ (4)$ gilt.

b) Wählt man $t = 2^{k-1}$ $(k \geq 1)$, so läßt f im Falle $d \not\equiv 0\ (64)$, $d \not\equiv 8\ (16)$, $d \not\equiv 10\ (16)$ die Zahlen $4^k(16q+14) - d.4^{k-1} = 4^{k-1}(64q+56-d)$ nicht aus.

Aus a) und b) ergibt sich, daß die Formen (1,1,2,d) mit d = 47,49,51, 52,53,55 nur die Zahlen 14,30,46 nicht annehmen.

c) Ist d = 38, so sind nach b) nur die Zahlen 16q+14 zu betrachten. Die Form f stellt die Werte $16q+14-38 = 16(q-2)+8 = 4(4(q-2)+2)$ dar, falls $q \geq 2$ und $q \not\equiv 1\ (4)$ ist. Gilt jedoch $q \equiv 1\ (4)$, $q \geq 9$, so ist $16q+14 - 38.2^2 = 16(q-9)+6 \notin N$. Damit läßt (1,1,2,38) nur die Zahlen 14,30,94 aus.

d) Für d = 50 sind nach b) auch nur die Werte 16q+14 zu untersuchen. Da $16q+14-50 = 16(q-3)+12 = 4(4(q-3)+3)$ für $q \geq 3$ von f angenommen wird, so stellt (1,1,2,50) alle Zahlen $\neq 14,30,46$ dar.

e) Im Falle d = 56 sind nach a) nur noch die Zahlen $4^k(16q+14)$ für q = 0,1,2 zu betrachten. Wählt man $t = 2^{k-1}$, so wird $4^k(16q+14) - 56.4^{k-1} = 4^{k+2}q$ für $k > 0$ von f angenommen. Damit läßt (1,1,2,56) nur die Zahlen 14,30,46 aus.

22.3 Die Formen 21.4-3 haben genau drei Ausnahmewerte.

Beweis. Die ternäre Teilform f = (1,1,3) stellt jede Zahl $\notin N = \{3^{2k+1}(3q+2$ dar.

a) Ist $d \not\equiv 0\ (3)$, so ist $m = 3^{2k+1}(3q+2)-d \notin N$. Gilt daher $m \geq 0$, so wird m von f angenommen. Folglich haben die Formen (1,1,3,d) mit d = 25, 26,28,29,31,32 nur die Ausnahmewerte 6,15,24.

b) Für d = 24 wird $3^{2k+1}(3q+2) - 24.3^{2k} = 3^{2k+1}(3(q-2))$ für $q \geq 2$ von f dargestellt, falls $q \neq 2 + 3^{2k'+1}(3q'+2)$ ist. Hat aber q diese Gestalt und gilt $q \geq 10$, so läßt f die Werte $3^{2k+1}(3q+2) - 24.4.3^{2k} = 3^{2k+2}(q-10)$ nicht aus, da $q-10 \not\equiv 0\ (3)$ ist. Zu untersuchen sind somit noch die Zahlen $3^{2k+1}(3q+2)$ für q = 0,1,8. Mit $t = 3^{k-1}$ erhält man $3^{2k+1}(3q+2) - 24.3^{2k-2} = 3^{2k-1}(3(9q+6)-8) = 3^{2k-1}(3(9q+3)+1)$; diese Zahl wird für k > 0 von f angenommen. Folglich besitzt (1,1,3,24) nur die Ausnahmewerte 6,15,78.

22.4 Die Formen 21.4-4 lassen nur drei Zahlen aus.

Beweis. Nach 4.1 stellt f = (1,1,4) jede Zahl $\notin N = \{4^k(8q+7),\ 4q+3\}$ dar.

I) d = 9.

a) Darstellung der Werte 4q+3: Mit t = 1 wird $4q+3-9 = 4(q-2)+2$ für $q \geq 2$ von f angenommen. Somit läßt (1,1,4,9) von den Zahlen 4q+3 nur 3 und 7 aus.

b) Darstellung der Zahlen $4^k(8q+7)$: Nach a) kann hier k > 0 vorausgesetzt werden. Wählt man $t = 2^{k-1}$, so ist $4^k(8q+7) - 9.4^{k-1} = 4^{k-1}(8(4q+2)+3) \notin N$ für k > 1. Für k = 1, d.h. für die Zahlen 32q+28 kann t = 2 gesetzt werden; man erhält $32q+28 - 9.2^2 = 32(q-1)+24 = 4(8(q-1)+6)$, dies wird für q > 0 durch f angenommen.

Somit stellt (1,1,4,9) jede Zahl $\neq 3,7,28$ dar.

II) d = 14.

a) Darstellung der Zahlen 4q+3: Mit t = 1 wird $4q+3-14 = 4(q-3)+1$ für $q \geq 3$ von f angenommen. Die Form (1,1,4,14) läßt daher von den Werten 4q+3 nur 3,7,11 aus.

b) Darstellung der Zahlen $4^k(8q+7)$: Nach a) kann wiederum k > 0 angenommen werden. Setzt man $t = 2^{k-1}$, so stellt f die Zahl $4^k(8q+7)-14.4^{k-1} = 4^{k-1}(8(4q+1)+6)$ dar, so daß die in a) angegebenen Ausnahmewerte 3,7,11 die einzigen bleiben.

§ 23. Die Formen 21.4-5,...,21.4-7.

23.1 Die Formen 21.4-5 lassen nur drei Zahlen aus.

Beweis. Die Form f = (1,1,5) stellt jede Zahl $\notin N = \{4^k(8q+3)\}$ dar.

a) Setzt man $t = 2^k$, so wird $4^k(8q+3) - d.4^k = 4^k(8q+3-d)$ für $q \geq 2$, $d \not\equiv 0\ (8)$, $d \not\equiv 3\ (4)$ von f angenommen.

b) Mit $t = 2^{k-1}$ $(k \geq 1)$ wird $4^k(8q+3) - d.4^{k-1} = 4^{k-1}(32q+12-d)$ für $k \geq 1$, $q \neq 0$ und $d \not\equiv 0\ (4)$, $d \not\equiv 1\ (8)$ von f dargestellt.

c) Für die Zahlen 3.4^k mit $k \geq 2$ wähle man $t = 2^{k-2}$. Ist dabei noch $d \not\equiv 0\ (4)$, $d \not\equiv 5\ (8)$, so gilt $4^k.3 - d.4^{k-2} = 4^{k-2}(48-d) \notin N$.

Aus a),b),c) erhält man: Die Formen (1,1,5,14) und (1,1,5,18) haben nur die Ausnahmewerte 3,11,12.

23.2 Die Formen 21.4-6 besitzen genau drei Ausnahmewerte.

Beweis. f = (1,1,6) stellt jede Zahl $\notin N = \{3^{2k+1}(3q+1)\}$ dar.

a) Ist d nicht durch drei teilbar, so ist mit t = 1 die Zahl $3^{2k+1}(3q+1)-d \notin N$. Die Formen (1,1,6,d) mit d = 22,23,25,26 stellen daher jede Zahl $\neq 3,12,21$ dar.

b) d = 21. Mit $t = 3^k$ wird $m_1 = 3^{2k+1}(3q+1) - 21.3^{2k} = 3^{2k+2}(q-2)$ für $q \geq 2$ und $q \neq 2 + 3^{2k'+1}(3q'+1)$ durch f dargestellt. Mit $t = 2.3^k$ nimmt f die Zahl $m_2 = 3^{2k+1}(3q+1) - 21.4.3^{2k} = 3^{2k+2}(q-9)$ für $q \geq 9$ und $q \neq 9 + 3^{2k''+1}(3q''+1)$ an. Da die Annahme $q = 2 + 3^{2k'+1}(3q'+1) = 9 + 3^{2k''+1}(3q''+1)$ zum Widerspruch $3|2$ führt, so wird für $q \geq 9$ eine der beiden Zahlen m_1, m_2 durch f dargestellt. Zu untersuchen sind somit noch die Werte $3^{2k+1}(3q+1)$ für q = 0,1,5. Wählt man $t = 3^{k-1}$, so wird $3^{2k+1}(3q+1) - 21.3^{2k-2} = 3^{2k-1}(3(9q)+2)$ für $k > 0$ von f angenommen. Die einzigen Ausnahmewerte von (1,1,6,21) sind somit 3,12,48.

23.3 Die Gleichungen $m-7 = 4^k(8q+7)$, $m-28 = 4^{k'}(8q'+7)$ bedingen k = 1, k' = 0. Die Aussage $m - 7.16 = 4^{k''}(8q''+7)$ kann nicht auch noch richtig sein.

Beweis. Aus den Voraussetzungen folgt $21 = 4^k(8q+7) - 4^{k'}(8q'+7)$.

a) Aus $k = 0$ würde $14 = 8q - 4^{k'}(8q'+7)$ folgen und hieraus $7 = 8(q-q')$ für $k' = 0$ oder $14 \equiv 0\ (4)$ für $k' > 0$; beides ist unmöglich. Daher ist

b) $k > 0$; aus $21 = 4^k(8q+7) - 4^{k'}(8q'+7)$ folgt dann $k' = 0$. Damit wird $28 = 4^k(8q+7) - 8q'$, dies ergibt wegen $28 \not\equiv 0\ (8)$ die Aussagen $k = 1$ und $q' = 4q$.

c) Würde nun noch gelten $m-7.16 = 4^{k''}(8q''+7)$, so folgte $105 = 4(8q+7) - 4^{k''}(8q''+7)$; dies bedingt $k'' = 0$ und führt zum Widerspruch $112 \equiv 4\ (8)$.

23.4 Die Form $(1,1,7,9)$ stellt jede Zahl $\neq 3,6,31$ dar.

Beweis. Nach 4.3 stellt $f = (1,1,9)$ jede Zahl dar $\notin N =$ $= \{4^k(8q+7),\ 9q+3,\ 9q+6\}$.

a) Darstellung der Zahlen $3n+1$, $3n+2$: In diesen Progressionen können nur Ausnahmewerte der Gestalt $4^k(8q+7)$ liegen.

1) Zahlen $3n+1$: Mit $z = 3.2^k$ wird $m = 4^k(8q+7) - 7.9.4^k = 4^{k+1}(2(q-7))$; da $m \equiv 1\ (3)$ ist, so wird m für $q \geq 7$ und $q \neq 7 + 4^{k'}(16q'+14)$ durch f angenommen. Ist $q = 7 + 4^{k'}(16q'+14)$, $q \geq 37$, so wird mit $z = 6.2^k$ die Zahl $m' = 4^k(8q+7) - 7.36.4^k = 4^k(8(q-31)+3) \equiv 1\ (3)$ durch f dargestellt. Zu untersuchen sind somit wegen $q \equiv 0\ (3)$ noch die Zahlen $4^k(8q+7)$ für $q = 0,3,6,21$. Setzt man $z = 3.2^{k-1}$, so ergibt sich $4^k(8q+7) - 7.9.4^{k-1} =$ $= 4^{k-1}(32(q-2)+29) = 4^{k-1}(8(4q-5)+5) \equiv 1\ (3)$, dies wird für $k > 0$, $q > 0$ von f nicht ausgelassen. Da $7.4^k = 7(2^k)^2$ gilt, so sind nur noch die Werte 31,55 und 175 zu betrachten. Es gilt ferner $55 = 3^2+3^2+7.2^2+9.1^2$, $175 = 7.5^2$, so daß $(1,1,7,9)$ jede Zahl $3n+1 \neq 31$ darstellt.

2) Zahlen $3n+2$: Mit $z = 2^k$ wird $m'' = 4^k(8q+7) - 7.4^k = 4^{k+1}.2q \equiv 1\ (3)$ von f angenommen, falls $q \neq 4^{k'}(16q'+14)$ ist. Mit $z = 2.2^k$ ergibt sich $4^k(8q+7) - 7.4.4^k = 4^k(8(q-3)+3) \equiv 1\ (3)$. Ist somit $q = 4^{k'}(16q'+14)$, so wird $4^k(8q+7) - 7.4.4^k$ von f dargestellt. $(1,1,7,9)$ läßt somit keine Zahl $3n+2$ aus.

b) Darstellung der Zahlen $3n$: Nach 4.3 und 23.3 ist für $3n \geq 112$ stets

eine der drei Zahlen $3n-7$, $3n-7.2^2$, $3n-7.4^2$ durch f darstellbar, da alle drei Werte $\equiv 2\ (3)$ sind. Zu untersuchen sind noch die Zahlen

1) $3n < 7$: 3 und 6 werden von (1,1,7,9) ausgelassen.

2) $3n = 7 + 4^k(8q+7) < 28$: solche Zahlen gibt es nicht.

3) $3n = 32q+35 < 112$: $99 = 6^2+7.3^2$.

Damit nimmt (1,1,7,9) jede Zahl $\neq 3,6,31$ an.

23.5 Die Form (1,1,7,10) stellt jede Zahl $\neq 3,6,31$ dar.

Beweis. a) Darstellung gerader Zahlen: Nach 8.5 stellt f = (1,1,10) jede Zahl $2n \notin N = \{4^k(16q+6)\}$ dar. Für $q \geq 2$ wird $4^k(16q+6) - 7.4.4^k = 4^k(16(q-2)+10)$ von f angenommen; für $q = 0,1$ und $k > 1$ wählt man etwa $z = 2^{k-1}$, der Wert $4^k(16q+6) - 7.4^{k-1} = 4^{k-1}(16(4q+1)+1)$ wird dann von f nicht ausgelassen. Zu untersuchen sind noch die Zahlen 6,22,24 und 88. Da aber $22 = 2^2+1^2+7.1^2+10.1^2$, $24 = 4^2+1^2+7.1^2$, $88 = 4^2+2^2+7.2^2+10.2^2$ gilt, so stellt (1,1,7,10) jede gerade Zahl $\neq 6$ dar.

b) Darstellung ungerader Zahlen:

1) Zahlen $4n+1$: Nach 7.1 wird jede Zahl $4n+1 \notin \{7^{2k+1}(7q+e) \mid e = 3,5,6\}$ von (1,1,7) angenommen. Da die Annahme $7^{2k+1}(7q+e) - 10.2^2 = 7^{2k'+1}(7q'+e')$ $(e' = 3,5,6)$ zum Widerspruch $7 \mid 40$ führt, so wird $4n+1 - 10.2^2$ für $4n+1 \geq 40$ durch (1,1,7) dargestellt. Unterhalb 40 ist nur die Zahl $21 \equiv 1\ (4)$ und von der Gestalt $7^{2k+1}(7q+e)$. Da aber $21 = 2^2+7.1^2+10.1^2$ ist, so nimmt die Form (1,1,7,10) jede Zahl $4n+1$ an.

2) Zahlen $m = 4n+3$: Ist t ungerade, so wird $m - 10t^2 \equiv 1\ (4)$. Angenommen, es sei $m-10 = 7^{2k+1}(7q+e)$ und $m - 10.3^2 = 7^{2k'+1}(7q'+e')(e' = 3,5,6)$, dann folgt $80 \equiv 0\ (7)$. Ist somit $m \geq 90$, so wird eine der Zahlen $m-10$, $m - 10.3^2$ durch (1,1,7) dargestellt.

A) Zahlen $m < 10$: $7 = 7.1^2$, 3 wird von (1,1,7,10) ausgelassen.

B) Zahlen $m = 10 + 7^{2k+1}(7q+e) < 90$: 31 wird ebenfalls von (1,1,7,10) ausgelassen.

Damit stellt (1,1,7,10) jede Zahl $\neq 3,6,31$ dar.

23.6. Die Form (1,1,7,12) stellt jede Zahl $\neq 3,6,31$ dar.

Beweis. Nach 5.7 wird jede Zahl $\notin N = \{3^{2k+1}(3q+2), 4q+3\}$ durch $f = (1,1,12)$ angenommen.

a) Darstellung der Zahlen $4n+\bar{n}$, $\bar{n} = 0,1,2$: Zu untersuchen sind nur die Zahlen $3^{2k+1}(3q+2)$. Für $z = 2$ wird $m = 4n+\bar{n} - 7.2^2 = 3^{2k+1}(3q+2) - 7.4 \equiv \bar{n}\ (4)$. Da aus $m = 3^{2k'+1}(3q'+2)$ folgt $3|28$, so stellt f die Zahlen m dar, falls $m \geq 0$ ist. Da ferner $24 = 4^2+1^2+7.1^2$ gilt, so stellt $(1,1,7,12)$ jede Zahl $4n$, $4n+1$, $4n+2$ dar $\neq 6$.

b) Darstellung der Zahlen $1 = 4n+3$: Mit ungeradem z wird $1 - 7z^2 \equiv 0\ (4)$. Angenommen, es sei $m = 1-7 = 3^{2k+1}(3q+2)$ und $m' = 1 - 7.3^2 = 3^{2k'+1}(3q'+2)$, dann folgt $56 \equiv 0\ (3)$. Ist daher $l \geq 63$, so wird eine der beiden Zahlen m,m' durch f dargestellt. Zu betrachten sind noch die Werte

1) $l < 7$: 3 wird von $(1,1,7,12)$ ausgelassen.

2) $l = 7 + 3^{2k+1}(3q+2) < 63$: 31 wird ebenfalls von $(1,1,7,12)$ nicht dargestellt.

Die einzigen Ausnahmewerte von $(1,1,7,12)$ sind somit 3,6,31.

§ 24. Die Formen 21.4-8,...,21.4-10.

24.1 Die Form $(1,1,8,10)$ läßt nur die Werte 3,6,7 aus.

Beweis. Nach 4.2 stellt $f = (1,1,8)$ jede Zahl dar $\notin N = \{4^k(16q+14), 4q+3, 8q+6\}$.

a) Darstellung gerader Zahlen:

1) Mit $t = 1$ wird $8q+6-10 = 8(q-1)+4 = 4(2(q-1)+1)$ für $q \geq 1$ durch f dargestellt; $q = 0$ ergibt die Zahl 6, die von $(1,1,8,10)$ ausgelassen wird.

2) Nach 1) kann in $4^k(16q+14)$ der Exponent $k > 0$ angenommen werden. Wählt man $t = 2^k$, so wird $4^k(16q+14) - 10.4^k = 4^k(16q+4) = 4^{k+1}(4q+1)$ durch f dargestellt.

Jede gerade Zahl $\neq 6$ wird damit von $(1,1,8,10)$ angenommen.

b) Darstellung ungerader Zahlen m: f stellt jede Zahl 4n+1 dar. Ist m = 4n+3, so wird für m $\geq$ 10 der Wert m-10 $\equiv$ 1 (4) von f angenommen. Es fehlen noch Darstellungen der Zahlen m < 10: 3 und 7 werden von (1,1,8,10) ausgelassen.

Die Form (1,1,8,10) hat somit nur die Ausnahmewerte 3,6,7.

24.2 Die Form (1,1,10,13) läßt nur die Werte 3,6,7 aus.

Beweis. Nach 8.5 stellt f = (1,1,10) jede gerade Zahl $\notin$ N = $\{4^k(16q+6)\}$ dar.

a) Darstellung gerader Zahlen: Mit $t = 2^k$ wird $4^k(16q+6) - 13.4^k = 4^k(16(q-1)+9)$ für k > 0 und q > 0 durch f dargestellt. Für k = 0 und q $\geq$ 3 wähle man t = 2, dann wird $16q+6 - 13.2^2 = 16(q-3)+2$ von f angenommen. Im Falle q = 0 wird $4^k.6 - 13.4^{k-1} = 4^{k-1}.11$ für k > 1 von f nicht ausgelassen. Da die Werte 22,24,38 Darstellungen durch (1,1,10,13) besitzen ($22 = 3^2+13.1^2$, $24 = 1^2+10.1^2+13.1^2$, $38 = 5^2+13.1^2$), stellt (1,1,10,13) jede gerade Zahl $\neq$ 6 dar.

b) Darstellung ungerader Zahlen m: Nach 13.1 wird für m $\geq$ 117, $m \neq 64q'+141$ ($q' \geq 4$) eine der Zahlen m-13, $m - 13.3^2$ von f angenommen. Ist $m = 64q'+141$, so wird $m - 13.5^2 = 64(q'-3)+8 = 4(16(q'-3)+2)$ für $q' \geq 3$ durch f dargestellt. Zu untersuchen sind noch

1) Zahlen m < 13: $1 = 1^2$, $5 = 2^2+1^2$, $9 = 3^2$, $11 = 1^2+10.1^2$, 3 und 7 werden von (1,1,10,13) ausgelassen.

2) Zahlen $m = 13 + 4^k(16q+6) < 117$: $19 = 3^2+10.1^2$, $35 = 5^2+10.1^2$, $37 = 6^2+1^2$, $51 = 4^2+5^2+10.1^2$, $67 = 2^2+1^2+10.1^2+13.2^2$, $83 = 8^2+3^2+10.1^2$, $99 = 8^2+5^2+10.1^2$, $101 = 10^2+1^2$, $109 = 10^2+3^2$, $115 = 5^2+10.3^2$.

Somit stellt (1,1,10,13) jede Zahl $\neq$ 3,6,7 dar.

24.3 Die Form (1,1,11,14) wird in § 35 behandelt.

§ 25. Die Formen 21.4-11,...,21.4-15.

25.1 Die Formen 21.4-11 besitzen genau drei Ausnahmewerte.

Beweis. Da die Form (1,2,2) dieselben Ausnahmewerte $4^k(8q+7)$ aufweist wie (1,1,1) und es sich um dieselben Werte d = 19,25,26,28 handelt wie in 22.1, so läßt sich der in 22.1 gegebene Beweis mühelos übertragen.

25.2 Die Formen 21.4-12 lassen nur drei Zahlen aus.

Beweis. Die ternäre Teilform f = (1,2,3) stellt nach 5.8 jede Zahl $\notin N = \{4^k(16q+10)\}$ dar.

a) Mit $t = 2^k$ wird $4^k(16q+10) - dt^2 = 4^k(16q+10-d)$ für $16q+10-d \geq 0$ und $d \not\equiv 0\ (16)$, $d \not\equiv 2\ (4)$ durch f angenommen.

b) Wählt man $t = 2^{k-1}$, so ist $4^k(16q+10) - dt^2 = 4^{k-1}(64q+40-d)$ für $k > 0$, $64q+40-d \geq 0$ und $d \not\equiv 0\ (4)$, $d \not\equiv 14\ (16)$ durch f darstellbar.

c) d = 34. Nach b) sind nur noch Zahlen 16q+10 zu untersuchen. Hier ist mit t = 1 die Zahl 16q+10-34 = 16(q-2)+8 = 4(4(q-2)+2) für $q \geq 2$, $q \not\equiv 0\ (4)$ durch f darstellbar. Ist $q = 4q'$, $q \geq 8$, so nimmt f die Zahl $16q+10 - 34.2^2 = 16(q-8)+2$ an. Damit hat (1,2,3,34) nur die Ausnahmewerte 10,26,74.

d) d = 41. Nach a) sind nur die Zahlen $4^k(16q+10)$ für q = 0,1 zu betrachten. Ist q = 1, so werden für $k > 0$ die Zahlen $4^k.26$ nach b) dargestellt. Für die Werte $4^k.10$ mit $k \geq 2$ wähle man $t = 2^{k-2}$; der Wert $4^k.10 - 41.4^{k-2} = 4^{k-2}(16.7+7)$ wird durch f angenommen. Somit stellt (1,2,3,41) jede Zahl ≠ 10,26,40 dar.

e) d = 42. Setzt man $t = 2^k$, so wird $4^k(16q+10) - 42.4^k = 4^{k+2}(q-2)$ für $q \geq 2$ und $q \neq 2 + 4^{k'}(16q'+10)$ durch f dargestellt. Hat q die Gestalt $2 + 4^{k'}(16q'+10)$, so folgt mit $t = 2.2^k$: $4^k(16q+10) - 42.4.4^k =$ $= 4^k(16(q-10)+2) \notin N$; da jetzt $q \geq 12$ ist, so nimmt f diese Zahl an. Es sind noch zu betrachten die Zahlen $4^k(16q+10)$ mit q = 0,1. Die Werte $4^k.26$ mit $k > 0$ lassen sich nach b) behandeln. Für die Zahlen $4^k.10$ mit $k \geq 2$ wird $4^k.10 - 42.4^{k-2} = 4^{k-2}(16.7+6)$ durch f dargestellt. Die Form (1,2,3,42) läßt somit nur die Werte 10,26,40 aus.

25.3 Die Formen 21.4-13 haben genau drei Ausnahmewerte.

Beweis. Die ternäre Teilform (1,2,4) hat genau dieselben Ausnahmewerte $4^k(16q+14)$ wie (1,1,2). Da es sich auch um dieselben Werte von d handelt wie in 21.4-2, so überträgt sich der in 22.2 gegebene Beweis.

25.4 Die Formen 21.4-14 haben genau drei Ausnahmewerte.

Beweis. Die Form f = (1,2,5) stellt jede Zahl $\notin N = \{5^{2k+1}(5q+e) | e = 2,3\}$ dar. Ist $d \not\equiv 0\ (5)$, so ist $5^{2k+1}(5q+e)-d \notin N$. Da nur die Zahlen $5^{2k+1}(5q+e) = 10,15,35$ kleiner als d sind, so lassen die Formen (1,2,5,d) mit d = 36,37,38,39 nur die Zahlen 10,15,35 aus.

25.5 Die Formen 21.4-15 besitzen genau drei Ausnahmewerte.

Beweis. Nach 5.1 stellt die Form f = (1,2,6) jede Zahl $\notin N = \{4^k(8q+5)\}$ dar.

a) Mit $t = 2^k$ wird $4^k(8q+5) - dt^2 = 4^k(8q+5-d)$ für $8q+5-d \geq 0$ und $d \not\equiv 0\ (8)$, $d \not\equiv 1\ (4)$ durch f dargestellt.

b) Wählt man $t = 2^{k-1}$, so ergibt sich $4^k(8q+5) - d.4^{k-1} = 4^{k-1}(32q+20-d)$, diese Zahl wird für $32q+20-d \geq 0$, $k > 0$ und $d \not\equiv 0\ (4)$, $d \not\equiv 7\ (8)$ von f angenommen.

c) d = 17. Nach b) sind nur noch die Zahlen 8q+5 zu untersuchen. Die Zahl $8q+5-17 = 8(q-2)+4 = 4(2(q-2)+1)$ ist für $q \not\equiv 0\ (4)$ und $q \geq 2$ durch f darstellbar. Ist $q = 4q'$, $q \geq 8$, so nimmt f die Zahl $8q+5 - 17.2^2 = 8(q-8)+1$ an. Die Form (1,2,6,17) lässt daher nur die Werte 5,13,37 aus.

d) d = 21. Nach b) sind nur die Zahlen $4^k.5$ und 8q+5 zu betrachten. Mit t = 1 wird $8q+5-21 = 8(q-2) = 4(2(q-2))$ für $q \geq 2$ und $q \not\equiv 2 + 4^{k'}(16q'+10)$ durch f dargestellt. Im Falle $q = 2 + 4^{k'}(16q'+10)$ setze man t = 2, dann wird $8q+5 - 21.2^2 = 8(q-10)+1$ von f angenommen. Für die Zahlen $4^k.5$ mit $k \geq 2$ wird $4^k.5 - 21.4^{k-2} = 4^{k-2}(8.7+3)$ durch f dargestellt. Damit lässt (1,2,6,21) nur die Werte 5,13,20 aus.

§ 26. Die Formen 21.4-16 und 21.4-17.

26.1 Die Form (1,2,7,16) lässt nur die Zahlen 5,14,21 aus.

Beweis. Jede Zahl 3n, 3n+1, die nicht zur Menge N = $= \{7^{2k+1}(7q+e) | e = 3,5,6\}$ gehört, wird von f = (1,2,7) dargestellt (G.Pall (33)).

a) Darstellung der Zahlen 3n ∈ N: Mit t = 3 wird $m = 7^{2k+1}(7q+e)-16.3^2 \equiv$ $\equiv 0$ (3) für $m \geq 0$ von f angenommen, da $m \not\equiv 0$ (7) ist. Da außerdem die Zahlen $42 = 1^2+2.3^2+7.1^2+16.1^2$, $84 = 6^2+2.4^2+16.1^2$ durch (1,2,7,16) dargestellt werden, so lässt (1,2,7,16) von den Werten 3n nur 21 aus.

b) Darstellung der Zahlen 3n+1 ∈ N: Wählt man t = 1, so ist $m' = 7^{2k+1}(7q+e)-16 \equiv 1-1 \equiv 0$ (3) und somit durch f darstellbar, da $m' \geq 0$ und $m' \equiv 5$ (7) ist.

c) Darstellung der Zahlen m = 3n+2: Ist $t \not\equiv 0$ (3), so ist $3n+2 - 16t^2 \equiv$ $\equiv 2-1 \equiv 1$ (3). Angenommen, es sei $m-16 = 7^{2k+1}(7q+e)$ und $m - 16.2^2 =$ $= 7^{2k'+1}(7q'+e')$ (e' = 3,5,6), dann folgt $48 \equiv 0$ (7). Ist daher $m \geq 64$, so wird eine der beiden Zahlen m-16, m - 64 durch f dargestellt.

1) Zahlen $m < 16$: $2 = 2.1^2$, $8 = 2.2^2$, $11 = 2^2+7.1^2$, 5 und 14 werden von (1,2,7,16) ausgelassen.

2) es ist $m = 16 + 7^{2k+1}(7q+e) \geq 86$.

Jede Zahl ≠ 5,14,21 wird somit von (1,2,7,16) angenommen.

<u>26.2</u> Die Form (1,2,8,11) stellt jede Zahl ≠ 5,7,39 dar.

Beweis. Nach 4.6 stellt f = (1,2,8) alle Zahlen ∉ $N = \{4^k(8q+7), 8q+5\}$ dar.

a) Zahlen $4^k(8q+7)$: Wählt man $t = 2^{k-1}$, so wird $4^k(8q+7) = 11.4^{k-1} =$ $= 4^{k-1}(32q+17) = 4^{k-1}(8(4q+2)+1)$ für $k \geq 1$ durch f angenommen. Für die Zahlen 8q+7 ergibt sich mit t = 1: $8q+7-11 = 8(q-1)+4 = 4(2(q-1)+1)$; dies ist für $q \not\equiv 0$ (4) durch f darstellbar. Im Falle $q = 4q'$, $q \geq 8$ erhält man mit t = 2 den Wert $8q+7 - 11.2^2 = 8(q-5)+3$, der durch f darstellbar ist. (1,2,8,11) lässt daher nur die Zahlen 7,39 aus.

b) Zahlen 8q+5: Mit t = 1 wird $8q+5-11 = 8(q-1)+2$ für $q \geq 1$ von f angenommen.

Die einzigen Ausnahmewerte von (1,2,8,11) sind somit 5,7,39.

26.3 Die Form (1,2,8,13) lässt nur die Werte 5,7,28 aus.

Beweis. Wie im Beweis zu 26.2 stützt man sich auf die ternäre Teilform $f = (1,2,8)$.

a) Darstellung der Zahlen $4^k(8q+7)$: Mit $t = 2^k$ wird $4^k(8q+7) - 13.4^k = 4^k(8(q-1)+2)$ für $q > 0$ von f angenommen. Für die Werte $4^k.7$ mit $k \geq 2$ kann $t = 2^{k-2}$ gewählt werden; die Zahlen $4^k.7 - 13.4^{k-2} = 4^{k-2}(8.12+3)$ sind durch f darstellbar. Jede Zahl $4^k(8q+7) \neq 7,28$ wird folglich durch (1,2,8,13) angenommen.

b) Darstellung der Zahlen $8q+5$: Ist $q \neq 1 + 4^{k'}(16q'+14)$ und $q \geq 1$, so ist $8q+5-13 = 8(q-1) = 4(2(q-1))$ durch f darstellbar. Hat q die Gestalt $1 + 4^{k'}(16q'+14)$, so ist $q \geq 15$ und man erhält für $t = 2$ die durch f darstellbare Zahl $8q+5 - 13.2^2 = 8(q-6)+1$.

(1,2,8,13) lässt somit nur die Zahlen 5,7,28 aus.

§ 27. Die Formen 21.4-18 und 21.4-19.

27.1 Die Form (1,2,9,12) stellt jede Zahl $\neq 5,7,35$ dar.

Beweis. Nach 6.2 stellt $f = (1,2,12)$ jede Zahl $2n,3n$ dar $\notin N = \{4^k(16q+10)\}$.

a) Darstellung gerader Zahlen $\in N$: Ist $k > 0$, so ergibt sich mit $z = 2^k$ die durch f darstellbare Zahl $4^k(16q+10) - 9.4^k = 4^k(16q+1)$. Für die Zahlen $16q+10$ erhält man mit $z = 2$ den Wert $16q+10 - 9.2^2 = 16(q-2)+6$, der für $q \geq 2$ durch f dargestellt wird. Da $10 = 1^2+9.1^2$, $26 = 3^2+2.2^2+9.1^2$ gilt, so stellt (1,2,9,12) jede gerade Zahl dar.

b) Darstellung ungerader Zahlen m: Ist $m \geq 81$, $m = 256q'+241$, so wird nach 13.1 eine der Zahlen $m-9$, $m - 9.3^2$ durch f angenommen. Hat m die Gestalt $256q'+241$, so ist $m - 9.5^2 = 256q'+16 = 4^2(16q'+1)$ durch f darstellbar.

1) Zahlen $m < 9$: $1 = 1^2$, $3 = 1^2+2.1^2$, 5 und 7 werden von (1,2,9,12) ausgelassen.

2) Zahlen $m = 9 + 4^k(16q+10) < 81$: $19 = 1^2+2.3^2$, $49 = 7^2$, $51 = 1^2+2.5^2$, $67 = 7^2+2.3^2$, 35 wird von (1,2,9,12) ausgelassen.

(1,2,9,12) stellt damit jede Zahl $\neq 5,7,35$ dar.

27.2 Die Form (1,2,9,20) hat nur die Ausnahmewerte 5,7,14.

Beweis. a) Darstellung gerader Zahlen: Nach 6.1 stellt $f = (1,2,9)$ jede Zahl $2n \notin \{4^k(16q+14)\}$ dar. Mit $t = 2^{k-1}$ wird $4^k(16q+14) - 20.4^{k-1} = 4^k(16q+9)$ für $k \geq 1$ von f angenommen. Mit $t = 1$ erhält man die Zahl $16q+14-20 = 16(q-1)+10$, die für $q > 0$ durch f dargestellt wird. Damit werden alle geraden Zahlen $\neq 14$ durch (1,2,9,20) angenommen.

b) Darstellung ungerader Zahlen m: Nach 8.6 stellt (1,2,20) jede Zahl $2n \notin N = \{5^{2k+1}(10q+e), 16q+14 \mid e = 2,8\}$ dar.

I) Es sei $m-9 = 5^{2k+1}(10q+e)$.

1) Die Annahme $m - 9.3^2 = 5^{2k'+1}(10q'+e')$ $(e' = 2,8)$ führt zum Widerspruch $72 \equiv 0\ (5)$.

2) Aus $m - 9.3^2 = 16q''+14$ ergibt sich $72 = 5^{2k+1}(10q+e) - 16q'' - 14$ und $5^{2k+1}(10q+e) \equiv 6\ (16)$, hieraus erhält man $3 \equiv q + \begin{cases} 5\ (8) & \text{für } e = 2 \\ 4\ (8) & \text{für } e = 8 \end{cases}$.

Für $m - 9.7^2$ gilt dann $9 + 5^{2k+1}(10q+e) - 9.7^2 \equiv 3\ (5)$ und $\equiv 9+6-9 \equiv 6\ (16)$.

Ist daher I) erfüllt und $m \geq 441$, so wird eine der Zahlen $m - 9.3^2$, $m - 9.7^2$ von (1,2,20) dargestellt.

II) Es sei $m-9 = 16q+14$, also $m = 16q+23$.

1) die Annahme $m - 9.3^2 = 16q''+14$ bedingt den Widerspruch $72 = 16(q-q'')$.

2) Ist $m - 9.3^2 = 5^{2k'+1}(10q'+e')$ $(e' = 2,8)$, so besagt dies $72 = 16q+14-5^{2k'+1}(10q'+e')$, also $5^{2k'+1}(10q'+e') \equiv 6\ (16)$. Somit ist $m = 5^{2k'+1}(10q'+e') + 81$ mit $5^{2k'+1}(10q'+e') \equiv 6\ (16)$. Dann gilt $m - 9.5^2 = 5^{2k'+1}(10q'+e') + 81 - 9.5^2 \equiv \begin{cases} 1\ (5) \\ 6\ (16) \end{cases} \cdot m - 9.5^2$ ist somit durch (1,2,20) darstellbar für $m \geq 225$.

Es fehlen noch Darstellungen der Zahlen

$m < 9$: $1 = 1^2$, $3 = 1^2+2.1^2$, 5 und 7 werden von (1,2,9,20) ausgelassen, sowie bei I): A) $m = 9 + 5^{2k+1}(10q+e) < 81$: $19 = 1^2+2.3^2$, $49 = 7^2$, $69 = 7^2+20.1^2$

B) $m = 9 + 5^{2k+1}(10q+e) < 441$ mit $q \equiv 6\ (8)$ für $e = 2$ und mit $q \equiv 7\ (8)$ für $e = 8$: $319 = 11^2+2.3^2+20.3^2$, $399 = 5^2+2.3^2+9.2^2+20.4^2$ und bei II): A) $m = 16q+23 < 81$: $23 = 1^2+2.1^2+20.1^2$, $39 = 1^2+2.1^2+9.2^2$, $55 = 1^2+2.3^2+9.2^2$, $71 = 1^2+2.5^2+20.1^2$

B) $m = 81 + 5^{2k'+1}(10q'+e') < 225$ mit $q' \equiv 6\ (8)$ für $e' = 2$ und $q' \equiv 7\ (8)$ für $e' = 8$: solche Zahlen gibt es nicht.

Damit stellt (1,2,9,20) jede Zahl $\neq 5,7,14$ dar.

<u>27.3</u> Die Form (1,2,10,11) stellt jede Zahl $\neq 5,7,31$ dar.

Beweis. Wie in 8.6 angegeben wurde, stellt $f = (1,2,10)$ jede Zahl $\notin N = \{5^{2k+1}(5q+e),\ 8q+7 \mid e = 1,4\}$ dar.

a) Darstellung der Zahlen $5^{2k+1}(5q+e)$: Mit $t = 1$ wird $m = 5^{2k+1}(5q+e) - 11 \equiv 4\ (5)$ und $m \equiv q + \begin{cases} 5-3 \equiv q+2\ (8) & \text{für } e = 1 \\ 4-3 \equiv q+1\ (8) & \text{für } e = 4 \end{cases}$. Ist somit $q \neq \begin{cases} 5\ (8) & \text{für } e = 1 \\ 6\ (8) & \text{für } e = 4 \end{cases}$, so wird m von f angenommen, falls $m \neq 5$ ist. Wählt man für $q \equiv \begin{cases} 5\ (8) & \text{bei } e = 1 \\ 6\ (8) & \text{bei } e = 4 \end{cases}$ $t = 2$, so ist $m' = 5^{2k+1}(5q+e) - 11.2^2 \equiv 1\ (5)$ und $m' \equiv 2+4 \equiv 6\ (8)$. Da $m' \geq 86$ ist, so wird m' durch f dargestellt. Somit stellt (1,2,10,11) jede Zahl $5^{2k+1}(5q+e)$ dar $\neq 5$.

b) Darstellung der Zahlen $8q+7$: Ist $q \geq 1$, so ist $8q+7-11 = 8(q-1)+4$ durch f darstellbar, falls $8q+7 \neq 11 + 5^{2k'+1}(5q'+e')$ $(e' = 1,4)$ ist. Hat $8q+7$ diese Gestalt und ist $q \geq 5$, so erhält man für $t = 2$: $8q+7 - 11.2^2 = 8(q-5)+3 \equiv 1-4 \equiv 2\ (5)$. Die Form f nimmt somit die Zahl $8q+7 - 11.2^2$ an. Die einzige Zahl $8q+7 = 11 + 5^{2k'+1}(5q'+e') < 44$ ist 31. Jede Zahl $8q+7 \neq 7,31$ wird daher durch (1,2,10,11) dargestellt.

(1,2,10,11) hat somit nur die Ausnahmewerte 5,7,31.

<u>27.4</u> Die Form (1,2,10,13) stellt jede Zahl $\neq 5,7,20$ dar.

Beweis. Wie in 27.3 wird hierzu die ternäre Form (1,2,10) benutzt.

a) Darstellung der Zahlen $5^{2k+1}(5q+e)$ $(e = 1,4)$: Mit $t = 1$ erhält man $m = 5^{2k+1}(5q+e) - 13 \equiv 2\ (5)$ und $m \equiv q + 5(e-1)\ (8)$. Ist somit $m \geq 0$ und $q \neq 4-5e\ (8)$, so nimmt (1,2,10) die Zahl m an. Für $q \equiv 4-5e\ (8)$ setze man $t = 2$, dies ergibt $5^{2k+1}(5q+e) - 13.2^2 \equiv 3\ (5)$ und $\equiv 4-4 \equiv 0\ (8)$.

Für $q \neq 0$ ist $5^{2k+1}(5q+e) - 13.2^2 \geq 128$; die Form (1,2,10,13) nimmt daher jede Zahl $5^{2k+1}(5q+e) \neq 5,20$ an.

b) Darstellung der Zahlen $8q+7$: Ist $q \geq 1$ und $8q+7 \neq 13 + 5^{2k+1}(5q'+e)$, so wird $8q+7-13 = 8(q-1)+2$ durch (1,2,10) dargestellt. Gilt aber $8q+7 = 13 + 5^{2k+1}(5q'+e)$, so wähle man $t = 2$, dann wird $8q+7 - 13.2^2 = 8(q-6)+3 = 5^{2k+1}(5q'+e) - 39 \equiv 1 \ (5)$; d.h. (1,2,10) nimmt für $q \geq 6$ den Wert $8q+7 - 13.2^2$ an. Da es keine Zahlen $8q+7 = 13 + 5^{2k+1}(5q'+e) < 52$ gibt, so wird jede Zahl $8q+7 \neq 7$ durch (1,2,10,13) dargestellt.

(1,2,10,13) hat somit nur die Ausnahmewerte 5,7,20.

§ 28. Die Formen (1,2,11,d) (d = 12,15,17,20).

28.1 Die Form (1,2,11,12) stellt jede Zahl $\neq 5,7,10$ dar.

Beweis. Nach 6.2 stellt die Teilform f = (1,2,12) jede Zahl 2n,3n dar $\neq N = \{4^k(16q+10)\}$.

a) Darstellung gerader Zahlen $\in N$: Mit $z = 2^k$ wird $4^k(16q+10) - 11.4^k = 4^k(16(q-1)+15)$ für $q > 0$ und $k > 0$ durch f dargestellt. Für die Zahlen $16q+10$ wähle man $z = 2$, dann werden die Zahlen $16q+10 - 11.2^2 = 16(q-3)+14$ für $q \geq 3$ von f angenommen. Ist $k > 1$, so kann $z = 2^{k-1}$ gesetzt werden, die Zahl $4^k.10 - 11.4^{k-1} = 4^{k-1}(16+13)$ wird durch f dargestellt. Da $26 = 1^2+2.1^2+11.1^2+12.1^2$, $42 = 1^2+2.3^2+11.1^2+12.1^2$, $40 = 3^2+2.2^2+11.1^2+12.1^2$ gilt, so stellt (1,2,11,12) jede gerade Zahl $\neq 10$ dar.

b) Darstellung ungerader Zahlen m: Ist $m \geq 99$ und $m = 11 + 4^k(16q+10)$, so wird nach 13.1 für $k \geq 2$ die Zahl $m - 11.3^2$ durch f dargestellt. Ist aber $m = 11 + 4^k(16q+10)$ mit $k \geq 3$, sowie $m = 11.3^2 + 4^{k'}(16q'+10)$, so ist nach 13.1 $k' = 1$ und nach 13.2 wird, da jetzt $m \geq 651$ sein muß, $m - 11.5^2$ von f angenommen.

1) Zahlen $m < 11$: $1 = 1^2$, $3 = 1^2+2.1^2$, $9 = 3^2$, 5 und 7 werden von (1,2,11,12) ausgelassen.

2) Zahlen $m = 11 + 4^k(16q+10) < 99$: $21 = 3^2+12.1^2$, $37 = 5^2+12.1^2$, $51 = 1^2+2.1^2+12.2^2$, $53 = 3^2+2.4^2+12.1^2$, $69 = 5^2+11.2^2$, $85 = 1^2+2.6^2+12.1^2$.

Die Form (1,2,11,12) hat somit nur die Ausnahmewerte 5,7,10.

28.2 Die Form (1,2,11,15) lässt nur die Werte 5,7,10 aus.

Beweis. Nach 9.1 stellt f = (1,2,11) jede gerade Zahl $\notin N = \{4^k(16q+10)\}$ dar.

a) Darstellung gerader Zahlen $\in N$: Mit $t = 2^k$ wird $4^k(16q+10) - 15.4^k = 4^k(16(q-1)+11)$ von f angenommen, falls $k > 0$ und $q > 0$ ist. Für die Zahlen $16q+10$ wird mit $t = 2$ die Zahl $16q+10 - 15.2^2 = 16(q-4)+14$ für $q \geq 4$ durch f dargestellt. Ist $k \geq 1$, so wähle man $t = 2^{k-1}$, dann wird $4^k.10 - 15.4^{k-1} = 25.4^{k-1} = (5.2^{k-1})^2$ durch f angenommen. Da die Zahlen 26,42,58 Darstellungen durch (1,2,11,15) besitzen ($26 = 3^2+2.1^2+15.1^2$, $42 = 5^2+2.1^2+15.1^2$, $58 = 5^2+2.3^2+15.1^2$), so stellt (1,2,11,15) jede gerade Zahl $\neq 10$ dar.

b) Darstellung ungerader Zahlen m: Ist $m \geq 135$, $m \neq 256q+175$, so wird nach 13.1 eine der Zahlen $m-15$, $m - 15.3^2$ durch f dargestellt. Ist jedoch $m = 256q+175$, so gilt $m - 15.5^2 = 256(q-1)+56 = 4(16(4q-4)+14)$; diese Zahl wird für $q \geq 1$ von f angenommen.

1) Zahlen $m < 15$: $1 = 1^2$, $3 = 1^2+2.1^2$, $9 = 3^2$, $11 = 3^2+2.1^2$, $13 = 2.1^2+11.1$

5 und 7 werden von (1,2,11,15) ausgelassen.

2) Zahlen $m = 15 + 4^k(16q+10) < 135$: $25 = 5^2$, $41 = 3^2+2.4^2$, $55 = 6^2+2.2^2+11.1^2$, $57 = 7^2+2.2^2$, $73 = 1^2+2.6^2$, $89 = 9^2+2.2^2$, $105 = 2^2+2.1^2+11.3^2$, $119 = 3^2+2.5^2+15.2^2$, $121 = 11^2$.

3) $175 = 2^2+2.6^2+11.3^2$.

Jede Zahl $\neq 5,7,10$ wird somit durch (1,2,11,15) dargestellt.

28.3 Die Form (1,2,11,17) stellt jede Zahl $\neq 5,7,10$ dar.

Beweis. Wie in 28.2 wird dazu die ternäre Teilform f = (1,2,11) benutzt.

a) Darstellung gerader Zahlen $\in N$: Mit $t = 2^k$ wird $4^k(16q+10) - 17.4^k = 4^k(16(q-1)+9)$ für $k > 0$ und $q > 0$ von f angenommen. Für die Zahlen 16q+10

wird $t = 2$ gewählt, dann ist für $q \geq 4$: $16q+10 - 17.2^2 = 16(q-4)+6$ durch f darstellbar. Ist $k \geq 1$, so setze man $t = 2^{k-1}$ und $4^k.10 - 17.4^{k-1} = 4^{k-1}.23 = (2.2^{k-1})^2+2(2.2^{k-1})^2+11(2^{k-1})^2$ wird von f angenommen. Da die Werte $26 = 3^2+17.1^2$, $42 = 5^2+17.1^2$, $58 = 3^2+2.4^2+17.1^2$ eine Darstellung durch (1,2,11,17) besitzen, lässt (1,2,11,17) unter den geraden Zahlen nur 10 aus.

b) Darstellung ungerader Zahlen m: Ist $m \geq 153$, $m \neq 256q'+313$, so wird nach 13.1 eine der Zahlen m-17, $m - 17.3^2$ von f angenommen. Hat m die Gestalt $256q'+313$, so ist $m - 17.5^2 = 256(q'-1)+144 = 4^2(16(q'-1)+9)$ für $q' \geq 1$ durch f darstellbar.

1) Zahlen $m < 17$: $1 = 1^2$, $3 = 1^2+2.1^2$, $9 = 3^2$, $11 = 3^2+2.1^2$, $13 = 2.1^2+11.1^2$, $15 = 2^2+11.1^2$, 5 und 7 werden von (1,2,11,17) ausgelassen.

2) Zahlen $m = 17 + 4^k(16q+10) < 153$: $27 = 3^2+2.3^2$, $43 = 5^2+2.3^2$, $57 = 7^2+2.2^2$, $59 = 3^2+2.5^2$, $75 = 5^2+2.5^2$, $91 = 2^2+2.2^2+11.1^2+17.2^2$, $107 = 3^2+2.7^2$, $121 = 11^2$, $123 = 11^2+2.1^2$, $139 = 11^2+2.3^2$.

3) $313 = 3^2+2.4^2+17.4^2$.

(1,2,11,17) lässt somit nur die Werte 5,7,10 aus.

<u>28.4</u> Die Form (1,2,11,20) stellt jede Zahl $\neq 5,7,10$ dar.

Beweis. Darstellung gerader Zahlen: $f = (1,2,11)$ stellt nach 9.1 jede gerade Zahl $\notin \{4^k(16q+10)\}$ dar. Mit $t = 2^{k-1}$ wird $4^k(16q+10) - 20.4^{k-1} = 4^k(16q+5)$ für $k \geq 1$ von f angenommen. Die Zahlen $16q+10-20 = 16(q-1)+6$ werden für $q \geq 1$ durch f dargestellt. Jede gerade Zahl $\neq 10$ wird somit von (1,2,11,20) angenommen.

b) Darstellung ungerader Zahlen m: Nach 8.6 stellt $g = (1,2,20)$ jede gerade Zahl $\notin N = \{16q+14,\ 5^{2k+1}(10q+e) \mid e = 2,8\}$ dar.

I) Es sei $m-11 = 5^{2k+1}(10q+e)$. Dann ist $m - 11.3^2 \equiv 2\ (5)$; ist daher $m \geq 99$, $m \not\equiv 1\ (16)$, so wird $m - 11.3^2$ von g dargestellt. Im Falle $m \equiv 1\ (16)$ wähle man $z = 7$, dann ist $m' = m - 11.7^2 \equiv 2\ (5)$ und $m' \equiv 6\ (16)$, daher wird m' für $m \geq 539$ von g angenommen.

II) Es sei $m-11 = 16q+14$, also $m = 16q+25$. Mit $z = 3$ ergibt sich

$m - 11.3^2 \equiv 9-3 \equiv 6\ (16)$. Ist somit $m \geq 99$ und $m \neq 99 + 5^{2k'+1}(10'+e')$ $(e' = 2,8)$, so ist m-99 durch g darstellbar. Im Falle $m = 99 + 5^{2k'+1}(10q'+e')$ wähle man $z = 5$, dann wird $m'' = m - 11.5^2 \equiv 4\ (5)$ und $m'' \equiv 9-3 \equiv 6\ (16)$. Ist daher $m \geq 275$, so nimmt g den Wert m'' an. Es fehlen noch Darstellungen der Zahlen

1) $m < 11$: $1 = 1^2$, $3 = 1^2+2.1^2$, $9 = 3^2$, 5 und 7 werden von (1,2,11,20) ausgelassen.

2) I). $m = 11 + 5^{2k+1}(10q+e) < 99$: $21 = 1^2+20.1^2$, $51 = 1^2+2.5^2$, $71 = 1^2+2.5^2+20.1^2$

$m = 11 + 5^{2k+1}(10q+e) < 539$, $m \equiv 1\ (16)$: $321 = 1^2+20.4^2$, $401 = 9^2+20.4^2$

II). $m = 16q+25 < 99$: $25 = 5^2$, $41 = 3^2+2.4^2$, $57 = 7^2+2.2^2$, $73 = 1^2+2.6^2$, $89 = 9^2+2.2^2$

$m = 99 + 5^{2k'+1}(10q'+e') = 16q+25$: hieraus folgt $q' \equiv 6\ (8)$ für $e' = 2$ und $q' \equiv 7\ (8)$ für $e' = 8$. Dann ist aber $m \geq 99 + 310 = 409$.

Die einzigen Ausnahmewerte von (1,2,11,20) sind somit 5,7,10.

§ 29. Die Formen (1,2,12,d) (d = 13,15,17,24).

29.1 Die Form (1,2,12,13) stellt jede Zahl $\neq 5,7,10$ dar.

Beweis. Nach 6.2 stellt f = (1,2,12) jede gerade Zahl $\notin N = \{4^k(16q+10)\}$ dar.

a) Darstellung gerader Zahlen $\in N$: Mit $t = 2^k$ wird $4^k(16q+10) - 13.4^k = 4^k(16(q-1)+13)$ für $k > 0$ und $q > 0$ durch f angenommen. Wird für die Zahlen $16q+10$ $t = 2$ gewählt, so ist $16q+10 - 13.2^2 = 16(q-3)+6$ für $q \geq 3$ durch f darstellbar. Da $4^k.10 - 13.4^{k-1} = 4^{k-1}.27 = (5.2^{k-1})^2+2(2^{k-1})^2$ für $k \geq 1$ von f angenommen wird, fehlen nur noch Darstellungen von 10, 26,42. Es gilt $26 = 1^2+12.1^2+13.1^2$, $42 = 3^2+2.2^2+12.1^2+13.1^2$; jede gerade Zahl $\neq 10$ wird somit von (1,2,12,13) dargestellt.

b) Darstellung ungerader Zahlen m: Ist $m \geq 325$, so ist nach 13.1 und 13.2 eine der Zahlen $m-13$, $m - 13.3^2$, $m - 13.5^2$ durch f darstellbar.

1) Zahlen $m < 13$: $1 = 1^2$, $3 = 1^2+2.1^2$, $9 = 3^2$, $11 = 3^2+2.1^2$, 5 und 7 werden von (1,2,12,13) ausgelassen.

2) Zahlen $m = 13 + 4^k(16q+10) < 117$: $23 = 3^2+2.1^2+12.1^2$, $39 = 3^2+2.3^2+12.1^2$, $53 = 3^2+2.4^2+12.1^2$, $55 = 5^2+2.3^2+12.1^2$, $71 = 3^2+2.5^2+12.1^2$, $87 = 5^2+2.5^2+12.1^2$, $103 = 7^2+2.1^2+13.2^2$

3) Zahlen $m = 117 + 4^{k'}(16q'+10) \leq 325$: Da nach 13.1 $k' > 2$ gelten muß, gibt es solche Zahlen nicht.

(1,2,12,13) lässt somit nur die Zahlen 5,7,10 aus.

29.2 Die Form (1,2,12,15) und die Form (1,2,12,17) stellen jede Zahl $\neq 5,7,10$ dar.

Beweis. Die Teilform (1,2,12) hat für gerades n dieselben Ausnahmeprogressionen $4^k(16q+10)$ wie (1,2,11) (nach 6.2 und 9.1). In 28.2 und 28.3 wurde gezeigt, daß die Formen (1,2,11,15), (1,2,11,17) alle Zahlen $\neq 5,7,10$ darstellen. In diesen Beweisen wurde nur Gebrauch gemacht von den Werten $d = 15$ bzw. 17 und davon, daß (1,2,11) jede gerade Zahl $\notin \{4^k(16q+10)\}$ darstellt. Der Beweis von 28.2 bzw. 28.3 gilt damit auch für 29.2, nur sind die speziellen Darstellungen von Zahlen durch (1,2,11,15), (1,2,11,17) durch solche durch (1,2,12,15), (1,2,12,17) zu ersetzen. War in den Darstellungen durch (1,2,11,15) bzw. (1,2,11,17) $z = 0$, so gilt die Darstellung auch für (1,2,12,15) bzw. (1,2,12,17). Für die restlichen Zahlen wird eine Darstellung im folgenden angegeben:

a) $d = 15$: $13 = 1^2+12.1^2$, $55 = 5^2+2.3^2+12.1^2$, $105 = 1^2+2.4^2+12.1^2+15.2^2$, $175 = 7^2+2.3^2+12.3^2$

b) $d = 17$: $23.4^{k-1} = (3.2^{k-1})^2+2(2^{k-1})^2+12(2^{k-1})^2$,
$13 = 1^2+12.1^2$, $15 = 1^2+2.1^2+12.1^2$, $91 = 5^2+2.3^2+12.2^2$.

29.3 Die Form (1,2,12,24) stellt jede Zahl $\neq 5,7,10$ dar.

Beweis. a) Darstellung gerader Zahlen: Nach 6.2 stellt (1,2,12) jede gerade Zahl $\notin \{4^k(16q+10)\}$ dar. Mit $t = 2^{k-1}$ wird $4^k(16q+10) - 24.4^{k-1} = 4^k(16q+4) = 4^{k+1}(4q+1)$ für $k \geq 1$ durch (1,2,12) dargestellt. Für die Zahlen

$16q+10$ wird mit $t = 1$ der Wert $16q+10-24 = 16(q-1)+2$ für $q > 0$ von $(1,2,12)$ angenommen. $(1,2,12,24)$ läßt somit unter den geraden Zahlen nur 10 aus.

b) Darstellung der Werte $m = 4n+1$: Nach 9.3 stellt $f = (2,12,24)$ jeden Wert $4n \notin N = \{12q+4, 4^k(8q+7)\}$ dar.

I) Es sei $m-1 = 12q_1+4$, dann ist $m-3^2 \equiv 5-3 = 2\ (6)$; ist somit $m \geq 9$, $m \neq 9 + 4^k(8q+7)$, so wird $m-3^2$ durch f dargestellt. Ist dagegen $m = 9 + 4^k(8q+7)$, so ist $m-9^2 \equiv 2\ (6)$ und die Annahme $m-9^2 = 4^{k'}(8q'+7)$ führt zu $4^k(8q+7) - 4^{k'}(8q'+7) \equiv 8\ (16)$. Da $k \geq 1$ und $k' \geq 1$ ist, so erhält man $4^{k-1}(8q+7) - 4^{k'-1}(8q'+7) \equiv 2\ (4)$.

a) $k = 1$ zieht auch $k' = 1$ nach sich und es ergibt sich der Widerspruch $8(q-q') \equiv 2\ (4)$.

b) $k > 1$ bedingt $k' > 1$, damit erhält man $0 \equiv 2\ (4)$.

Ist somit $m \geq 81$, so wird $m-3^2$ oder $m-9^2$ durch f dargestellt.

1) $m = 12q_1+5 < 9$: 5 wird durch $(1,2,12,24)$ ausgelassen.

2) $m = 9 + 4^k(8q+7) < 81$, $k > 0$, $m \equiv 5\ (6)$, d.h. $q \equiv 2\ (3)$: dann ist $m \geq 101$.

II) Es sei $m-1 = 4^k(8q+7)$ $(k > 0)$, also $m \geq 29$. Dann ist $m-3^2 = 4^{k'}(8q'+7)$ nicht möglich. Denn $m-3^2 = 4^{k'}(8q'+7)$ führt zu der Gleichung $4^k(8q+7) - 4^{k'}(8q'+7) = 8$, die, wie oben gezeigt wurde, für keinen Wert k,k',q,q' richtig ist. Ist somit $m \neq 6\bar{q}+13$, so wird $m-3^2$ durch f angenommen. Im Falle $m \equiv 1\ (6)$ erhält man für $m-5^2$: $m-25 \equiv 0\ (6)$ und aus $m-5^2 = 4^{k''}(8q''+7)$ folgt $4^k(8q+7) - 4^{k''}(8q''+7) = 24 \equiv 8\ (16)$; dies kann aber nicht sein. Für alle Zahlen $m \geq 25$ wird somit einer der beiden Werte $m-9$, $m-25$ durch f dargestellt.

Jede Zahl $4n+1 \neq 5$ wird somit durch $(1,2,12,24)$ dargestellt.

c) Darstellung der Werte $m' = 4n+3$: Nach 9.4 stellt $(1,2,24)$ jede Zahl $8q+3$ dar. Für die Zahlen $8q+7$ wird $z = 1$ gewählt, dann ist $8q+7-12 = 8(q-1)+3$ und wird somit für $q \geq 1$ durch $(1,2,24)$ angenommen. $q = 0$ ergibt die Zahl 7, die von $(1,2,12,24)$ ausgelassen wird.

Damit stellt $(1,2,12,24)$ jede Zahl $\neq 5,7,10$ dar.

29.4 Die Formen (1,2,12,20) und (1,2,12,22) werden in § 36 untersucht.

§ 30. Die Formen (1,2,13,17) und (1,2,13,20).

30.1 Die Aussagen $m - 13.2^2 = 4^k(16q+14)$, $m - 13.4^2 = 4^{k'}(16q'+14)$ können nicht zusammen bestehen.

Beweis. Aus der Annahme $m - 13.2^2 = 4^k(16q+14)$, $m - 13.4^2 = 4^{k'}(16q'+14)$ folgt $4^k(16q+14) - 4^{k'}(16q'+14) = 156$ und hieraus für

a) $k = 0$: $k' = 0$ und damit $156 \equiv 0\ (16)$

b) $k > 0$: $k' > 0$ und damit $39 \equiv 0\ (2)$.

Beides ist aber unmöglich.

30.2 Ist d ungerade und sind die Werte x_1, x_2 so gewählt, daß $x_2^2 - x_1^2 = 8j$ gilt mit ungeradem j, so können die Gleichungen $m - dx_1^2 = 4^k(16q+2v)$, $m - dx_2^2 = 4^{k'}(16q'+2v)$ (v ungerade) nur unter folgenden Bedingungen zusammen bestehen:

a) $k = 1$ falls $jd-v = 4u$. Ist dabei $u \equiv 1\ (2)$, so ist $k' = 2$ und $m = dx_2^2 + 256q' + 32v$; $u \equiv 0\ (2)$ bedingt $k' > 2$.

b) $k' = 1$ falls $jd-v \equiv 2\ (4)$, also $jd+v = 4w$. Ist dabei $w \equiv 1\ (2)$, so ist $k = 2$ und $m = dx_1^2 + 256q + 32v$; $w \equiv 0\ (2)$ bedingt $k > 2$.

Beweis. Aus den Voraussetzungen folgt $d(x_2^2 - x_1^2) = 4^k(16q+2v) - 4^{k'}(16q'+2v)$, $8jd = 4^k(16q+2v) - 4^{k'}(16q'+2v)$. Setzt man $jd = d'$, so ist die Behauptung nach 13.1 richtig.

30.3 Aus $m-13 = 4^k(16q+14)$, $m - 13.5^2 = 4^{k'}(16q'+14)$ folgt $k = 1$, $k' \geq 3$; $m - 13.7^2 = 4^{k''}(16q''+14)$ ist zusätzlich nicht möglich.

Beweis. Aus den Voraussetzungen folgt nach 30.2 $k' > 2$, $k = 1$, dann ist $m = 325 + 4^{k'}(16q'+14) \geq 1221$. Die Annahme $m - 13.7^2 = 4^{k''}(16q''+14)$ führt zu $312 = 4^{k'}(16q'+14) - 4^{k''}(16q''+14)$. Da $k' \geq 3$ ist, muß $k'' \geq 1$ sein und man erhält $39 = 4^{k'-1}(8q'+7) - 4^{k''-1}(8q''+7)$, hieraus folgt $k'' = 1$ und $39+7 = 46 \equiv 0\ (4)$.

30.4 Die Form (1,2,13,17) stellt jede Zahl $\neq 5,7,10$ dar.

Beweis. Die ternäre Teilform f = (1,2,17) stellt nach 9.5 jede Zahl 6n, 6n+2 dar $\notin N = \{4^k(16q+14)\}$.

a) Darstellung der Zahlen $6n \in N$: Mit $z = 2.2^k$ wird $4^k(16q+14) - 13.4.4^k = 4^k(16(q-3)+10) \equiv 0-4 \equiv 2\ (6)$. Aus $4^k(16q+14) \equiv 0\ (6)$ folgt $q \equiv 1\ (3)$. Für die Zahlen $4^k.30$ gilt jedoch $4^k.30 = 13(2^k)^2+17(2^k)^2$. Damit wird jede Zahl 6n durch (1,2,13,17) dargestellt.

b) Darstellung der Zahlen $6n+2 \in N$: Aus $4^k(16q+14) \equiv 2\ (6)$ folgt $q \equiv 0\ (3)$. Mit $z = 6.2^k$ wird $4^k(16q+14) - 13.6^2.4^k = 4^k(16(q-29)+10) \equiv 2(6)$ für $q \geq 29$ und mit $z = 6.2^{k-1}$ wird $4^k(16q+14) - 13.6^2.4^{k-1} = 4^k(16(q-7)+9)$ für $k \geq 1$, $q \geq 7$ von f dargestellt. Zu untersuchen sind noch die Zahlen $4^k.14 = (2^k)^2+13(2^k)^2$, $4^k.62 = 2(4.2^k)^2+13(2^k)^2+17(2^k)^2$, $4^k.110 = (3.2^k)^2+2(4.2^k)^2+13(2.2^k)^2+17(2^k)^2$ sowie 16q+14 für q = 9,12,15, 18,21,24,27. Da $158 = 6^2+2.1^2+13.2^2+17.2^2$, $206 = 1^2+13.2^2+17.3^2$, $254 = 7^2+13.2^2+17.3^2$, $302 = 3^2+2.2^2+13.1^2+17.4^2$, $350 = 5^2+13.5^2$, $398 = 1^2+2.6^2+13.5^2$, $446 = 2.2^2+13.1^2+17.5^2$ gilt, so werden alle Zahlen 6n+2 von (1,2,13,17) angenommen.

c) Darstellung der Zahlen m = 6n+4 : Da $m_1 = m - 13.2^2 \equiv 0\ (6)$ und $m_2 = m - 13.4^2 \equiv 0\ (6)$ gilt, so stellt für $m \geq 208$ f nach 30.1 stets eine der beiden Zahlen m_1, m_2 dar.

1) Zahlen $6n+4 < 52$: $4 = 2^2$, $16 = 4^2$, $22 = 3^2+13.1^2$, $28 = 3^2+2.1^2+17.1^2$, $34 = 4^2+2.3^2$, $40 = 3^2+2.3^2+13.1^2$, $46 = 1^2+2.4^2+13.1^2$, 10 wird durch (1,2,13,17) nicht dargestellt.

2) Zahlen $6n+4 = 52 + 4^k(16q+14) < 208$: $82 = 8^2+2.3^2$, $130 = 7^2+13.1^2+17.2^2$, $172 = 1^2+2.3^2+17.3^2$, $178 = 5^2+17.3^2$.

Die Form (1,2,13,17) lässt somit von den geraden Zahlen nur 10 aus.

d) Darstellung der Zahlen m = 6n+1, 6n+3 : Ist $z \equiv \pm 1\ (6)$, so wird $6n + \begin{cases} 1 \\ 3 \end{cases} - 13z^2 \equiv \begin{cases} 1-1 \equiv 0\ (6) \\ 3-1 \equiv 2\ (6) \end{cases}$. Nach 30.3 ist für $m \geq 637$ stets eine der Zahlen $m-13$, $m - 13.5^2$, $m - 13.7^2$ durch (1,2,17) darstellbar.

1) Zahlen $m < 13$: $1 = 1^2$, $3 = 1^2+2.1^2$, $9 = 3^2$, 7 wird von (1,2,13,17)

ausgelassen.

2) Zahlen $m = 6n + \{\frac{1}{3} = 13 + 4^k(16q+14) < 325$: $27 = 3^2+2.3^2$, $43 = 5^2+2.3^2$, $69 = 1^2+17.2^2$, $75 = 5^2+2.5^2$, $91 = 2^2+2.3^2+13.2^2+17.1^2$, $123 = 2^2+2.1^2+13.3^2$, $133 = 4^2+13.3^2$, $139 = 2^2+2.3^2+13.3^2$, $171 = 2.3^2+17.3^2$, $187 = 4^2+2.3^2+17.3^2$, $219 = 3^2+2.1^2+13.4^2$, $235 = 8^2+2.3^2+17.3^2$, $237 = 2^2+2.2^2+13.4^2+17.1^2$, $261 = 6^2+13.4^2+17.1^2$, $267 = 3^2+2.5^2+13.4^2$, $283 = 3^2+2.1^2+17.4^2$, $315 = 5^2+2.3^2+17.4^2$.

Die einzige Zahl 6n+1, 6n+3, die von (1,2,13,17) ausgelassen wird, ist somit die Zahl 7.

β) Darstellung der Zahlen $m = 6n+5$: Ist $m \neq 256q+341$ ($q \geq 3$) und $m \geq 1053$, so wird nach 30.2 eine der Zahlen $m - 13.3^2$, $m - 13.9^2$ durch (1,2,17) dargestellt. Im Falle $m = 256q+341$ ergibt sich mit $z = 15$ die Zahl $m - 13.15^2 = 256(q-11)+232 = 4(16(4q-41)+10)$, die für $q \geq 11$ durch (1,2,17) angenommen wird.

1) Zahlen $m = 6n+5 < 117$: $11 = 3^2+2.1^2$, $17 = 17.1^2$, $23 = 2^2+2.1^2+17.1^2$, $29 = 2^2+2.2^2+17.1^2$, $35 = 2^2+2.3^2+13.1^2$, $41 = 3^2+2.4^2$, $47 = 4^2+2.3^2+13.1^2$, $53 = 1^2+13.2^2$, $59 = 3^2+2.5^2$, $65 = 4^2+2.4^2+17.1^2$, $71 = 1^2+2.1^2+17.2^2$, $77 = 3^2+17.2^2$, $83 = 9^2+2.1^2$, $89 = 9^2+2.2^2$, $95 = 3^2+2.3^2+17.2^2$, $101 = 1^2+2.4^2+17.2^2$, $107 = 6^2+2.1^2+13.2^2+17.1^2$, $113 = 2.4^2+13.1^2+17.2^2$.

2) Zahlen $m = 6n+5 = 117 + 4^k(16q+14) < 1053$: $131 = 9^2+2.5^2$, $173 = 11^2+13.2^2$, $179 = 9^2+2.7^2$, $227 = 15^2+2.1^2$, $275 = 15^2+2.5^2$, $323 = 1^2+2.5^2+17.4^2$, $341 = 8^2+2.6^2+13.2^2+17.3^2$, $365 = 3^2+2.4^2+13.2^2+17.4^2$, $371 = 9^2+2.3^2+17.4^2$, $419 = 7^2+2.7^2+17.4^2$, $467 = 15^2+2.11^2$, $515 = 6^2+2.1^2+13.2^2+17.5^2$, $557 = 10^2+2.4^2+17.5^2$, $563 = 15^2+2.13^2$, $611 = 6^2+2.7^2+13.2^2+17.5^2$, $659 = 9^2+2.17^2$, $707 = 5^2+2.3^2+13.2^2+17.6^2$, $749 = 3^2+2.8^2+17.6^2$, $755 = 6^2+2.11^2+13.2^2+17.5^2$, $803 = 15^2+2.17^2$, $851 = 5^2+2.9^2+13.2^2+17.6^2$, $899 = 16^2+2.3^2+13.1^2+17.6^2$, $941 = 10^2+2.2^2+17.7^2$, $947 = 15^2+2.19^2$, $995 = 2.9^2+17.7^2$, $1013 = 2.8^2+13.2^2+17.7^2$, $1043 = 2.1^2+13.4^2+17.7^2$.

3) Zahlen $m = 256q+341 = 6n+5$ mit $3 \leq q \leq 10$: $1109 = 2.2^2+13.1^2+17.8^2$,

$1877 = 7^2+2.8^2+17.10^2$, $2645 = 12^2+2.4^2+13.13^2+17.4^2$.

Damit lässt (1,2,13,17) nur die Zahlen 5,7,10 aus.

30.5 Die Form (1,2,13,20) hat nur die Ausnahmewerte 5,7,10.

Beweis. Nach 8.6 stellt f = (1,2,20) jede gerade Zahl dar $\neq N =$
$= \{5^{2k+1}(10q+e),\ 16q+14 \mid e = 2,8\}$.

A) Darstellung gerader Zahlen $\in N$:

a) Zahlen $5^{2k+1}(10q+e)$: Mit z = 2 wird $\bar{m} = 5^{2k+1}(10q+e) - 13.2^2 \equiv 3\ (5)$ und $\bar{m} \equiv 2q + \begin{cases} 6\ (16) \text{ für } e = 2 \\ 4\ (16) \text{ für } e = 8 \end{cases}$. Ist somit $5^{2k+1}(10q+e) \not\equiv 2\ (16)$ und $5^{2k+1}(10q+e) \geq 52$, so wird $\bar{m}$ durch f dargestellt. Im Falle $5^{2k+1}(10q+e) \equiv$ $\equiv 2\ (16)$ ergibt sich mit z = 4 der Wert $5^{2k+1}(10q+e) - 13.4^2 \equiv \begin{cases} 2\ (5) \\ 2\ (16) \end{cases}$; da aber $5^{2k+1}(10q+e) = 16q'+2 \geq 210$ ist, so wird er durch f angenommen.

b) Zahlen 16q+14: Ist $q \geq 3$, $16q+14 \neq 52 + 5^{2k+1}(10\bar{q}+e)$, so wird $16q+14 - 13.2^2 = 16(q-3)+10$ durch f dargestellt. Im Falle $16q+14 =$ $= 52 + 5^{2k+1}(10\bar{q}+e)$ wird mit z = 6 die Zahl $16q+14 - 13.6^2 \equiv \begin{cases} 4\ (5) \\ 10\ (16) \end{cases}$ für $16q+14 \geq 468$ durch f angenommen; zu untersuchen sind somit noch die Werte

1) $5^{2k+1}(10q+e) < 52$: $40 = 3^2+2.3^2+13.1^2$, 10 wird von (1,2,13,20) ausgelassen.

2) $16q+14 < 52$: $14 = 1^2+13.1^2$, $30 = 3^2+2.2^2+13.1^2$, $46 = 5^2+2.2^2+13.1^2$.

3) $16q+14 = 52 + 5^{2k+1}(10\bar{q}+e) < 468$: $62 = 7^2+13.1^2$, $142 = 5^2+13.3^2$, $302 = 17^2+13.1^2$, $462 = 3^2+2.8^2+13.5^2$.

Jede gerade Zahl $\neq 10$ wird somit von (1,2,13,20) dargestellt.

B) Darstellung ungerader Zahlen m:

c) Es sei $m-13 = 5^{2k+1}(10q+e)$. Ist dann $m \not\equiv 3\ (16)$, $m \geq 117$, so wird $m - 13.3^2$ durch f angenommen, da $m_1 = m - 13.3^2 \equiv 1\ (5)$ und $m_1 \not\equiv 14\ (16)$ gilt. Im Falle $m \equiv 3\ (16)$ wird die Zahl $m_2 = m - 13.7^2 \equiv \begin{cases} 1\ (5) \\ 6\ (16) \end{cases}$ für $m \geq 637$ durch f dargestellt.

d) Es sei $m-13 = 16q+14$, also $m = 16q+27$. Ist $m \neq 117 + 5^{2k'+1}(10q'+e)$ und $m \geq 117$, so ist $m - 13.3^2$ durch f darstellbar, da $m - 13.3^2 \equiv 6\ (16)$ ist. Hat aber m die Gestalt $m = 117 + 5^{2k'+1}(10q'+e)$, so ist $m \geq 427$ und

für $z = 5$ wird $m_3 = m - 13.5^2 \equiv \{\begin{smallmatrix} 2 & (5) \\ 6 & (16) \end{smallmatrix}$ durch f dargestellt.

Zu betrachten sind noch die Zahlen

1) $m < 13$: $1 = 1^2$, $3 = 1^2+2.1^2$, $9 = 3^2$, $11 = 3^2+2.1^2$, 5 und 7 werden von (1,2,13,20) ausgelassen.

2) $m = 13 + 5^{2k+1}(10q+e) < 117$: $23 = 1^2+2.1^2+20.1^2$, $53 = 1^2+2.4^2+20.1^2$, $73 = 1^2+13.2^2+20.1^2$, $103 = 9^2+2.1^2+20.1^2$

3) $m = 13 + 5^{2k+1}(10q+e) = 16\bar{q}+3 < 637$: $323 = 1^2+2.1^2+20.4^2$, $403 = 9^2+2.1^2+20.4^2$

4) $m = 16q+27 < 117$: $27 = 3^2+2.3^2$, $43 = 5^2+2.3^2$, $59 = 3^2+2.5^2$, $75 = 5^2+2.5^2$, $91 = 1^2+2.3^2+13.2^2+20.1^2$, $107 = 3^2+2.3^2+20.2^2$.

Jede Zahl $\neq 5,7,10$ wird somit durch (1,2,13,20) angenommen.

§ 31. Die Formen 21.4-23,...,21.4-26.

31.1 Die Form (1,3,3,8) lässt nur die Zahlen 2,5,26 aus.

Beweis. Die ternäre Teilform $f = (1,3,3)$ stellt jede Zahl dar $\notin N = \{3^{2k}(3q+2)\}$. Mit $t = 3^k$ ergibt sich $3^{2k}(3q+2) - 8.3^{2k} = 3^{2k}(3(q-2))$, dies wird für $q \geq 2$, $q \neq 2 + 3^{2k'}(9q'+6)$ von f angenommen. Wählt man $t = 2.3^k$, so ist $3^{2k}(3q+2) - 8.4.3^{2k} = 3^{2k}(3(q-10))$ für $q \geq 10$, $q \neq 10 + 3^{2k''}(9q''+6)$ durch f darstellbar. Da aber aus $q = 2 + 3^{2k'}(9q'+6) = 10 + 3^{2k''}(9q''+6)$ der Widerspruch $3|8$ folgt, so ist für $q \geq 10$ jede Zahl $3^{2k}(3q+2)$ durch (1,3,3,8) darstellbar. Zu untersuchen sind noch die Werte, die sich für $q = 0,1,8$ ergeben. Für diese q und $k \geq 1$ wird mit $t = 3^{k-1}$ aber $3^{2k}(3q+2) - 8.3^{2k-2} = 3^{2k-2}(27q+10) = 3^{2k-2}(3(9q+3)+1)$ von f nicht ausgelassen.

Damit stellt (1,3,3,8) jede Zahl $\neq 2,5,26$ dar.

31.2 Die Form (1,3,4,5) stellt jede Zahl $\neq 2,15,38$ dar.

Beweis. Nach 4.4 stellt $f = (1,3,4)$ jede Zahl $\notin N = \{3^{2k+1}(3q+2), 4q+2\}$ dar.

a) Darstellung der Zahlen $4q+2$: Ist t ungerade, so ist $4q+2 - 5t^2 \equiv$ $\equiv 2-1 \equiv 1\ (4)$. Angenommen, es sei $4q+2-5 = 3^{2k'+1}(3q'+2)$, so gilt $4q-2 \equiv 2\ (3)$; dann ist aber auch $4q+2 - 5.3^2 \equiv 2\ (3)$. Für $4q+2 \geq 45$ wird somit eine der Zahlen $4q+2-5$, $4q+2-45$ von f angenommen.

1) Zahlen $4q+2 < 5$: 2 wird von (1,3,4,5) ausgelassen.

2) Zahlen $4q+2 = 5 + 3^{2k'+1}(3q'+2) < 45$: 38 wird ebenfalls von (1,3,4,5) ausgelassen.

b) Darstellung der Zahlen $3^{2k+1}(3q+2)$: Ist $t \not\equiv 0\ (3)$, so ist $3^{2k+1}(3q+2) - 5t^2 \equiv 1\ (3)$. Aus $3^{2k+1}(3q+2) - 5 \equiv 2\ (4)$ folgt $3^{2k+1}(3q+2) \equiv 3\ (4)$ und damit $3^{2k+1}(3q+2) - 5.2^2 \equiv 3\ (4)$. Ist daher die Zahl $3^{2k+1}(3q+2) \geq 20$, so wird sie von (1,3,4,5) angenommen. Der einzige Wert $3^{2k+1}(3q+2) = 5+4\bar{q}+2 < 20$ ist 15; dieser wird von (1,3,4,5) ausgelassen.

Somit nimmt (1,3,4,5) jede Zahl $\neq 2,15,38$ an.

<u>31.3</u> Die Form (1,3,5,9) stellt jede Zahl $\neq 2,11,74$ dar.

Beweis. Nach 6.4 stellt f = (1,3,9) jede Zahl $\notin N = \{3^{2k+1}(3q+2),\ 3q+2\}$ dar.

a) Darstellung der Zahlen $3^{2k+1}(3q+2)$: Mit $z = 1$ ist $m =$ $= 3^{2k+1}(3q+2) - 5 \equiv 1\ (3)$; da ferner $m \geq 1$ ist, so ist jede Zahl $3^{2k+1}(3q+2)$ durch (1,3,5,9) darstellbar.

b) Darstellung der Zahlen $3q+2$: Ist $z \not\equiv 0\ (3)$, so wird $3q+2 - 5z^2 \equiv$ $\equiv 2+z^2 \equiv 0\ (3)$. Aus $3q+2 = 5 + 3^{2k'+1}(3q'+2)$ und $3q+2 = 5.2^2 + 3^{2k''+1}(3q''+2)$ folgt $15 = 3^{2k'+1}(3q'+2) - 3^{2k''+1}(3q''+2)$, d.h. $5 = 3^{2k'}(3q'+2) - 3^{2k''}(3q''+2)$. Ist hierin

1) $k' = 0$, so folgt $k'' > 0$ und dann ist $3 = 3q' - 3^{2k''}(3q''+2)$ und $1 = q' - 3^{2k''-1}(3q''+2)$.

2) $k' > 0$, so folgt $k'' = 0$ und $7 = 3^{2k'}(3q'+2) - 3q''$.

Die beiden Aussagen $3q+2-5 = 3^{2k'+1}(3q'+2)$, $3q+2 - 5.2^2 = 3^{2k''+1}(3q''+2)$ können somit nur zusammen bestehen, wenn $3q+2 = 20 + 3^{2k''+1}(3q''+2)$ mit $k'' > 0$ gilt. Dann ist jedoch $3q+2 - 5.4^2 = 3^{2k''+1}(3q''+2) - 60 =$

$= 3^{2k'''+1}(3q'''+2)$ unmöglich, da hieraus $3^{2k''}(3q''+2) = 20 + 3^{2k'''}(3q'''+2)$ und weiter $k''' = 0$ und $22 \equiv 0\ (3)$ folgen würde.

Zu untersuchen sind noch die Zahlen

A) $3q+2 < 5$: 2 wird von (1,3,5,9) ausgelassen.

B) $3q+2 = 5 + 3^{2k'+1}(3q'+2) < 20$: 11 wird ebenfalls von (1,3,5,9) ausgelassen.

C) $3q+2 = 20 + 3^{2k''+1}(3q''+2) < 80$ $(k'' > 0)$: 74 ist Ausnahmewert von (1,3,5,9).

Somit nimmt (1,3,5,9) jeden Wert $\neq 2,11,74$ an.

31.4 Die Form (1,3,5,14) stellt jede Zahl $\neq 2,10,11$ dar.

Beweis. Nach 7.2 stellt die ternäre Teilform $f = (1,3,5)$ jede Zahl $4n, 4n+1 \notin N = \{5^{2k+1}(5q+e) \mid e = 2,3\}$ dar.

a) Darstellung der Zahlen $4n, 4n+1 \in N$: Mit $t = 2$ ist $5^{2k+1}(5q+e) - 14.2^2 \equiv 4\ (5) \notin N$. Da aber $40 = 3^2+3.2^2+5.1^2+14.1^2$ gilt und 40 die einzige Zahl $5^{2k+1}(5q+e) \equiv \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases} (4)$ unterhalb 56 ist, so lässt (1,3,5,14) keinen Wert $4n, 4n+1$ aus.

b) Darstellung der Zahlen $m = 4n+2, 4n+3$: Für $t \equiv 1\ (2)$ wird $m - 14t^2 \equiv \begin{cases} 0\ (4) \text{ für } m \equiv 2\ (4) \\ 1\ (4) \text{ für } m \equiv 3\ (4) \end{cases}$. Die Annahme $m-14 = 5^{2k+1}(5q+e)$, $m - 14.3^2 = 5^{2k'+1}(5q'+e')$ $(e' = 2,3)$ führt zum Widerspruch $5 \mid 112$. Ist somit $m \geq 126$, so wird $m-14$ oder $m - 14.3^2$ durch f dargestellt.

1) Zahlen $m < 14$: $3 = 3.1^2$, $6 = 1^2+5.1^2$, $7 = 2^2+3.1^2$, die Zahlen 2,10 und 11 werden von (1,3,5,14) ausgelassen.

2) Zahlen $m = 14 + 5^{2k+1}(5q+e) < 126$: $54 = 7^2+5.1^2$, $74 = 1^2+3.2^2+5.1^2+14.2^2$, $79 = 2^2+3.5^2$, $99 = 4^2+3.1^2+5.4^2$.

Damit wird jede Zahl $\neq 2,10,11$ durch (1,3,5,14) angenommen.

31.5 Die Form (1,3,5,11) wird in § 35 untersucht.

31.6 Die Form (1,3,6,7) stellt jede Zahl $\neq 2,5,30$ dar.

Beweis. Nach 5.2 stellt $f = (1,3,6)$ jede Zahl $\notin N = \{4^k(16q+14), 3q+2\}$ dar.

a) Darstellung der Zahlen $3n \in N$: Mit $t = 3.2^k$ wird $m = 4^k(16q+14)-7.9.4^k =$
$= 4^k(16(q-4)+15) \equiv 0\ (3)$; ist $m \geq 0$, so wird m durch f angenommen.
Zu betrachten sind noch die Werte $4^k.30$. Mit $t = 3.2^{k-1}$ wird
$4^k.30 - 7.9.4^{k-1} = 4^{k-1}(16.3+9)$ für $k \geq 1$ durch f dargestellt. Daher ist
jede Zahl $3n \neq 30$ durch (1,3,6,7) darstellbar.

b) Darstellung der Zahlen $3n+1 \in N$: Mit $t = 2^k$ gilt $m' =$
$= 4^k(16q+14) - 7.4^k = 4^k(16q+7) \equiv 1-1 \equiv 0\ (3)$.

c) Darstellung der Zahlen $m'' = 3n+2$: Ist $t \not\equiv 0\ (3)$, so ist $m'' - 7t^2 \equiv$
$\equiv 2-1 \equiv 1\ (3)$. Die Annahme $m''-7 = 4^k(16q+14)$, $m'' - 7.2^2 = 4^{k'}(16q'+14)$
führt zu $21 = 4^k(16q+14) - 4^{k'}(16q'+14)$, also zum Widerspruch $2 \mid 21$. Falls
somit $m'' \geq 28$ gilt, so ist $m''-7$ oder $m''-28$ durch f darstellbar.

1) Zahlen $m < 7$: 2 und 5 werden von (1,3,6,7) ausgelassen.

2) Zahlen $m = 7 + 4^k(16q+14) < 28$: Solche Zahlen gibt es nicht.

Jeder Wert $\neq 2,5,30$ wird somit durch (1,3,6,7) angenommen.

31.7 Aus $m-8 = 4^k(16q+14)$, $m - 8.2^2 = 4^{k'}(16q'+14)$ folgt $m = 256s$
mit $s \geq 1$.

Beweis. Die Voraussetzungen haben zur Folge $24 = 4^k(16q+14) - 4^{k'}(16q'+14)$
a) $k = 0$ bedingt auch $k' = 0$ und damit $24 = 16(q-q')$, somit muß
b) $k > 0$ gelten, dann ist auch $k' > 0$ und man erhält
$3 = 4^{k-1}(8q+7) - 4^{k'-1}(8q'+7)$.

1) $k = 1$ bedingt $k' > 1$: $-1 = 2q - 4^{k'-2}(8q'+7)$, woraus $k' = 2$ folgt.

2) $k > 1$ zieht $k' = 1$ nach sich; dies ergibt $10 = 4^{k-1}(8q+7) - 8q'$,
d.h. $10 \equiv 0\ (4)$.

Die Voraussetzungen können somit nur zusammen bestehen für $k = 1$,
$k' = 2$, womit sich $m = 256q'+224+32 = 256s$ mit $s \geq 1$ ergibt.

31.8 Die Form (1,3,6,8) stellt jede Zahl $\neq 2,5,46$ dar.

Beweis. Wie in 31.6 wird zum Beweis $f = (1,3,6)$ aus 5.2 herangezogen.

a) Zahlen $3n \in N$: Mit $t = 2^k$ wird $4^k(16q+14) - 8.4^k = 4^k(16q+6) \equiv 1\ (3)$.

b) Zahlen $3n+1 \in N$: Setzt man $t = 3.2^k$, so wird $m' = 4^k(16q+14)-8.9.4^k =$
$= 4^k(16(q-4)+6) \equiv 1\ (3)$ für $q \neq 2$ durch f dargestellt. Für die Zahlen

$4^k.46$ wähle man $t = 3.2^{k-1}$, dann ist für $k \geq 1$ $4^k.46-8.9.4^{k-1} =$ $= 4^{k-1}(16.7) = 4^{k+1}.7 = (2^{k+1})^2+6(2^{k+1})^2$. Jede Zahl $3n+1 \neq 46$ wird somit von (1,3,6,8) angenommen.

c) Zahlen $m = 3n+2$: Ist $m \geq 32$, so wird nach 31.7 für $m \neq 256s$ ($s \geq 1$) eine der Zahlen $m-8$, $m-32$ durch f dargestellt. Im Falle $m = 256s$ wähle man $t = 4$, dann ist $m - 8.4^2 \equiv 2-2 \equiv 0$ (3) und $m - 8.4^2 =$ $= 4^3(4s-2)$ wird für $s \not\equiv 0$ (4) von f angenommen. Für $s \equiv 0$ (4) wird $m = 256s = 256(4r) = 256.4^1.p$ mit $4r = 4^1.p$ ($p \not\equiv 0$ (4), $p \geq 1$). Wählt man jetzt $t = 4.2^1$, so gilt $m - 8t^2 = 256.4^1.p - 8.4^1.4^2 = 4^{1+3}(4p-2) =$ $\equiv 0$ (3). Da $4p-2 \not\equiv 0$ (4) und $4p-2 \not\equiv 14$ (16), $4p-2 \geq 2$ gilt, so wird $m - 8t^2$ durch f dargestellt. Zu untersuchen sind noch die Zahlen

1) $m < 8$: 2 und 5 werden von (1,3,6,8) ausgelassen

2) $m = 8 + 4^k(16q+14) < 32$: Solche Zahlen gibt es nicht.

Die Form (1,3,6,8) lässt somit nur die Werte 2,5,46 aus.

§ 32. Die Formen 21.4-27,...,21.4-30.

32.1 Die Form (1,3,7,14) stellt jede Zahl $\neq 2,5,6$ dar.

Beweis. Nach 7.3 stellt $f = (1,3,7)$ jede Zahl $4n$, $4n+3$ dar $\notin N =$ $= \{3^{2k+1}(3q+2)\}$.

a) Darstellung der Werte $4n, 4n+3 \in N$: Mit $t = 2$ ist $m =$ $= 3^{2k+1}(3q+2) - 14.2^2 \equiv \begin{cases} 0 \text{ oder } 3 & (4) \\ 1 & (3) \end{cases}$. Ist somit $3^{2k+1}(3q+2) \geq 56$, so wird m durch f angenommen. Da aber $15 = 1^2+14.1^2$, $24 = 3.1^2+7.1^2+14.1^2$, $51 = 5^2+3.2^2+14.1^2$ gilt, so stellt (1,3,7,14) jede Zahl $4n$, $4n+3$ dar.

b) Darstellung der Werte $m_1 = 4n+1$, $4n+2$: Mit ungeradem t ist $4n+\{\begin{matrix}1\\2\end{matrix} - 14t^2 \equiv \{\begin{matrix}3\\0\end{matrix}$ (4). Die Annahme $m_1-14 = 3^{2k+1}(3q+2)$, $m_1 - 14.3^2 =$ $= 3^{2k'+1}(3q'+2)$ führt zum Widerspruch $3 \mid 112$. Ist somit $m_1 \geq 126$, so wird m_1-14 oder $m_1-14.3^2$ durch f dargestellt.

1) Zahlen $m_1 < 14$: $1 = 1^2$, $9 = 3^2$, $10 = 3.1^2+7.1^2$, $13 = 1^2 + 3.2^2$, 2,5,6 werden von (1,3,7,14) ausgelassen.

2) Zahlen $m_1 = 14 + 3^{2k+1}(3q+2) < 126$: $29 = 1^2+7.2^2$, $38 = 2^2+3.3^2+7.1^2$, $65 = 3^2+14.2^2$, $74 = 8^2+3.1^2+7.1^2$, $101 = 5^2+3.4^2+7.2^2$, $110 = 10^2+3.1^2+7.1^2$.

Somit wird jede Zahl $\neq 2,5,6$ durch $(1,3,7,14)$ dargestellt.

32.2 Aus $m-6 = 4^k(8q+7)$, $m - 6.3^2 = 4^{k'}(8q'+7)$ $(k > 0, k' > 0)$ folgt $m = 512q' + 502$.

Beweis. Die Voraussetzungen haben zur Folge $48 = 4^k(8q+7) - 4^{k'}(8q'+7)$, also $12 = 4^{k-1}(8q+7) - 4^{k'-1}(8q'+7)$.

a) $k = 1$ bedingt auch $k' = 1$ und hieraus erhält man $12 = 8(q-q')$.

b) $k > 1$ zieht auch $k' > 1$ nach sich : $3 = 4^{k-2}(8q+7) - 4^{k'-2}(8q'+7)$.

1) $k = 2$, dann muß $k' > 2$ sein : $-1 = 2q - 4^{k'-3}(8q'+7)$, folglich ist $k' = 3$ und es gilt $3 = q - 4q'$.

2) $k > 2$ bewirkt $k' = 2$ und $10 = 4^{k-2}(8q+7) - 8q'$, $10 \equiv 0\ (4)$.

Die Voraussetzungen können somit nur zusammen bestehen für $k = 2$, $k' = 3$, hieraus folgt $m = 512q' + 502$.

32.3 Die Form $(1,4,4,6)$ stellt jede Zahl $\neq 2,3,34$ dar.

Beweis. Die ternäre Teilform $f = (1,4,4)$ stellt nach 6.5 jede Zahl $\notin N = \{4^k(8q+7), 4q+2, 4q+3\}$ dar.

a) Darstellung der Zahlen $4n$: Zu untersuchen sind hier noch die Werte $4^k(8q+7)$ mit $k > 0$. Wählt man $t = 2^k$, so wird $4^k(8q+7) - 6.4^k = 4^k(8q+1)$ durch f dargestellt.

b) Nach 6.5 stellt $(1,4,4)$ jede Zahl $4n+1$ dar.

c) Darstellung der Zahlen $m = 4n+2$: Für ungerades t gilt $m - 6t^2 \equiv 2-2 \equiv 0\ (4)$. Ist $m \geq 54$, $m \neq 512q'+502$, so ist nach 32.2 eine der Zahlen $m-6$, $m-54$ durch f darstellbar. Im Falle $m = 512q'+502$ wähle man $t = 5$, dann ist $m - 6.5^2 = 512q'+352 = 4^2(32q'+22) = 4^2(8(4q'+2)+6)$ und wird somit von f angenommen.

1) Zahlen $m < 6$: 2 wird von $(1,4,4,6)$ ausgelassen.

2) Zahlen $m = 6 + 4^k(8q+7) < 54$ mit $k > 0$: 34 wird ebenfalls von $(1,4,4,$ ausgelassen.

3) Darstellung der Werte $4n+3$: Mit $t = 1$ wird $4q+3-6 = 4(q-1)+1$ für

$q \geq 1$ durch f dargestellt.

Damit stellt (1,4,4,6) jede Zahl $\neq 2,3,34$ dar.

32.4 Die Form (1,4,6,10) stellt jede Zahl $\neq 2,3,12$ dar.

Beweis. a) Nach 17.2 gilt für jedes $n \neq 1,6$: $n = 2x^2+2y^2+3z^2+5t^2$. Dann ist $2n = 4x^2+4y^2+6z^2+10t^2 = (2x)^2+4y^2+6z^2+10t^2$. Jede gerade Zahl $\neq 2,12$ wird somit durch (1,4,6,10) angenommen.

b) In 5.3 wurde gezeigt, dass die ternäre Teilform f = (1,4,6) jede Zahl $\notin N = \{3^{2k+1}(3q+1),\ 16q+2\}$ darstellt. Nach a) sind nur noch ungerade Zahlen zu untersuchen; d.h. es sind nur noch die Werte $3^{2k+1}(6q'+1)$ zu betrachten. Mit t = 1 ist $m = 3^{2k+1}(6q'+1) - 10 \equiv \{\begin{smallmatrix}2 & (3)\\ 1 & (2)\end{smallmatrix}$. Ist somit $3^{2k+1}(6q'+1) \geq 10$, so wird m durch f angenommen. Der einzige Wert $3^{2k+1}(6q'+1) < 10$ ist 3, der von (1,4,6,10) ausgelassen wird.

Damit stellt (1,4,6,10) jede Zahl $\neq 2,3,12$ dar.

32.5 Die Form (1,4,6,17) stellt jede Zahl $\neq 2,3,12$ dar.

Beweis. Nach 5.3 stellt f = (1,4,6) jede Zahl $\notin N = \{3^{2k+1}(3q+1),\ 16q+2\}$ dar.

a) Darstellung der Zahlen $m = 3^{2k+1}(3q+1)$: Ist $t \not\equiv 0\ (3)$, so ist $m - 17t^2 \equiv 0-2 \equiv 1\ (3)$. Die Zahl $m' = m-17$ wird durch f angenommen, falls $m' \geq 0$ und $m \not\equiv 3\ (16)$ gilt. Hat aber $3 < m$ die Gestalt $16q'+3$, so ist $m \geq 147$ und es gilt $m'' = m - 17.2^2 \equiv 15\ (16)$; m'' wird somit durch f dargestellt. Zu betrachten sind noch die Zahlen $m < 17$: 3 und 12 werden von (1,4,6,17) ausgelassen.

b) Darstellung der Zahlen $m_1 = 16q+2$: Ist $m_1 \geq 17$, $m_1 \neq 17 + 3^{2k+1}(3q+1)$, so ist $m_1-17 \equiv 1\ (16)$ und wird von f angenommen. Ist aber $m_1 = 17 + 3^{2k+1}(3q+1)$, so ist $m_1 \geq 146$ und $m_1 - 17.3^2 \equiv \{\begin{smallmatrix}9 & (16)\\ 2 & (3)\end{smallmatrix}$; m_1 ist daher durch (1,4,6,17) darstellbar, falls $m_1 > 146$ ist. Die Zahl 146 besitzt aber die Zerlegung $146 = 6^2+4.3^2+6.1^2+17.2^2$, so dass jeder Wert $16q+2 > 2$ von (1,4,6,17) angenommen wird.

Jede Zahl $\neq 2,3,12$ wird somit durch (1,4,6,17) dargestellt.

32.6 Die Aussagen $m-5 = 4^k(16q+14)$, $m - 5.5^2 = 4^{k'}(16q'+14)$ können nur für $k' \geq 3$ zusammen richtig sein. Hat jedoch m die Gestalt $= 5.5^2 + 4^{k'}(16q'+14)$ mit $k' \geq 3$, so ist $m - 5.7^2 = 4^{k''}(16q''+14)$ unmöglich.

Beweis. Die Voraussetzungen $m-5 = 4^k(16q+14)$, $m - 5.5^2 = 4^{k'}(16q'+14)$ bedingen nach 30.2 $k' \geq 3$, $k = 1$, $m = 4^{k'}(16q'+14) + 125$. Angenommen, es sei ausserdem $m - 5.7^2 = 4^{k''}(16q''+14)$, dann gilt $120 = 4^{k'}(16q'+14) - 4^{k''}(16q''+14)$; da $k' \geq 3$ ist, muss $k'' \geq 1$ sein, dann gilt $15 = 4^{k'-1}(8q'+7) - 4^{k''-1}(8q''+7)$, hieraus folgt $k'' = 1$ und $22 = 4^{k'-1}(8q'+7) - 8q'' \equiv 0\ (4)$. Die zusätzliche Aussage $m - 5.7^2 = 4^{k''}(16q''+14)$ führt also zum Widerspruch.

32.7 Die Form (1,5,6,12) stellt jede Zahl $\neq 2,3,8$ dar.

Beweis. a) Darstellung gerader Zahlen: Nach 6.3 stellt $f = (1,5,6)$ jede gerade Zahl $\neq N = \{4^k(16q+2)\}$ dar. Mit $t = 2^k$ wird $4^k(16q+2)-12.4^k = 4^k(16(q-1)+6)$ von f angenommen, falls $q \geq 1$ ist. Für die Zahlen 2.4^k mit $k \geq 2$ wird $t = 2^{k-2}$ gewählt, dann ist $4^k.2 - 12.4^{k-2} = 4^{k-1}.5$ durch f darstellbar. Die Zahlen 2 und 8 werden dagegen von (1,5,6,12) ausgelassen.

b) Darstellung ungerader Zahlen m: Die Teilform $g = (1,6,12)$ stellt nach 9.2 jede gerade Zahl $\neq N = \{6q+2,\ 4^k(16q+14)\}$ dar.

I) Es sei $m-5 = 4^k(16q+14)$. Ist dann $m \neq 256\bar{q}+229$, so hat nach 13.1 $m - 5.3^2$ nicht die Gestalt $4^{k'}(16q'+14)$. Die Zahl $m - 5.3^2$ wird somit für $m \geq 45$ und $m-45 \neq 2\ (6)$ durch g angenommen; gilt aber $m - 5.3^2 \equiv 2\ (6)$, so ist $m \equiv 5\ (6)$. Ist in diesem Fall $m \neq 4^{k''}(16q''+14) + 125$ mit $k'' \geq 3$, so ist nach 30.2 $m - 5.5^2$ nicht von der Gestalt $4^{k''}(16q''+14)$. Da ferner $m - 5.5^2 \equiv 5-5 \equiv 0\ (6)$ gilt, so wird $m - 5.5^2$ für $m \geq 125$ durch g dargestellt. Für die Zahlen $m = 4^{k''}(16q''+14) + 125$ mit $k'' \geq 3$ ist nach 32.6 $m - 5.7^2 = 4^{k'''}(16q'''+14)$ unmöglich. Da $m \geq 1021$ ist und $m - 5.7^2 \equiv 0\ (6)$ gilt, so wird $m - 5.7^2$ durch g dargestellt. Es verbleiben noch die Zahlen $m = 256\bar{q}+229$. Für sie ist $m - 5.5^2 = 256\bar{q}+104 = 4(16(4\bar{q}+1)+10)$, so dass $m - 5.5^2$ für $\bar{q} \neq 0\ (3)$ von g angenommen wird. Im Falle $\bar{q} \equiv 0\ (3)$ wähle

man $y = 9$, dann wird $m = 5.9^2 = 256(q-1)+80 = 4^2(16(q-1)+5) \equiv 4\ (6)$ von g dargestellt.

Es fehlen somit noch Darstellungen der Zahlen

1) $m < 5 : 1 = 1^2$, 3 wird von (1,5,6,12) ausgelassen

2) $m = 5 + 4^k(16q+14) < 45 : 19 = 1^2+6.1^2+12.1^2$, $35 = 3^2+5.2^2+6.1^2$

3) $m = 5 + 4^k(16q+14) \equiv 5\ (6)$, $m < 125 : 83 = 3^2+5.2^2+6.3^2$

4) $m = 256q+229 < 405$, $q \equiv 0\ (3) : 229 = 7^2+5.6^2$.

II) Es sei $m-5 = 6q_1+2$, also $m \equiv 1\ (6)$. Ist dann $m \neq 45 + 4^k(16q+14)$, so ist $m = 5.3^2$ für $m \geq 45$ durch g darstellbar, da $m = 5.3^2 \equiv 1+3 \equiv 4\ (6)$ gilt. Nach 30.2 ist die Aussage $m-45 = 4^k(16q+14)$, $m = 5.9^2 = 4^{k'}(16q'+14)$ nur richtig für $m = 256q+269$. Da $m = 5.9^2 \equiv 1+3 \equiv 4\ (6)$ ist, so wird $m-405$ für $m \geq 405$ und $m \neq 13\ (256)$ durch g dargestellt. Für die Zahlen $m' = 256q+269$ ist $q \equiv 2\ (3)$, da $m' \equiv 1\ (6)$ ist, somit $m' = 768q"+781$. Mit $y = 15$ erhält man $m' = 5.15^2 = 768(q"-1)+424 = 4(16(12q"-6)+10) \equiv$ $\equiv 1+3 \equiv 4\ (6)$, so dass $m' = 5.15^2$ durch g angenommen wird, falls $q" \geq 1$ ist.

Es fehlen noch Darstellungen der Zahlen

1) $m < 5$: vgl. I,1)

2) $m = 6q+7 < 45 : 7 = 1^2+6.1^2$, $13 = 1^2+12.1^2$, $19 = 1^2+6.1^2+12.1^2$,
$25 = 5^2$, $31 = 5^2+6.1^2$, $37 = 5^2+12.1^2$, $43 = 5^2+6.1^2+12.1^2$

3) $m = 45 + 4^k(16q+14) < 405$, $m \equiv 1\ (6) : 91 = 5^2+6.3^2+12.1^2$,
$139 = 11^2+6.1^2+12.1^2$, $187 = 13^2+6.1^2+12.1^2$, $229 = 11^2+12.3^2$,
$235 = 13^2+6.3^2+12.1^2$, $283 = 11^2+6.5^2+12.1^2$, $331 = 13^2+6.3^2+12.3^2$,
$379 = 5^2+6.3^2+12.5^2$.

4) $781 = 13^2+6.2^2+12.7^2$.

Die Form (1,5,6,12) stellt damit jede Zahl $\neq 2,3,8$ dar.

§ 33. Die Formen 21.4-31,...,21.4-34.

33.1 Die Form (2,2,3,7) stellt jede Zahl $\neq 1,6,24$ dar.

Beweis. Nach 4.5 stellt $f = (2,2,3)$ jede Zahl $\notin N = \{3^{2k+1}(3q+2),\ 8q+1\}$

dar.

a) Darstellung der Zahlen $m = 3^{2k+1}(3q+2)$: Für $t \not\equiv 0\ (3)$ ist $m - 7t^2 \equiv 2\ (3)$. Ist somit $m \not\equiv 0\ (8)$ und $m \geq 7$, so wird $m-7$ von f angenommen. Im Fall $m \equiv 0\ (8)$ ist $m - 7.2^2 \equiv 4\ (8)$ und daher durch f darstellbar, falls $m \geq 28$ gilt.

1) Werte $3^{2k+1}(3q+2) < 7$: 6 wird von (2,2,3,7) ausgelassen

2) Werte $m = 3^{2k+1}(3q+2) \equiv 0\ (8)$, $m < 28$: 24 wird ebenfalls von (2,2,3,7) ausgelassen.

b) Darstellung der Zahlen $m' = 8q+1$: Ist $q \geq 1$ und $m' \neq 7 + 3^{2k+1}(3\bar{q}+2)$, so wird $8q+1-7 = 8(q-1)+2$ von f angenommen. Im Falle $m' = 7 + 3^{2k+1}(3\bar{q}+2)$ ist $m' \geq 49$. Da $8q+1 - 7.2^2 = 8(q-4)+5$ und $8q+1 - 7.2^2 = 7 + 3^{2k+1}(3\bar{q}+2) - 7.2^2 = 3(3^{2k+1}\bar{q}+2.3^{2k}-7) = 3s$ gilt mit $s \equiv \begin{cases} 1\ (3) & \text{für } k = 0 \\ 2\ (3) & \text{für } k > 0 \end{cases}$, so ist $m' - 7.2^2$ für $k = 0$ durch f darstellbar. Ist jedoch $k > 0$, so ist $m' \geq 385$ und $m' - 7.3^2 \equiv \begin{cases} 1-7 \equiv 2\ (8) \\ 1\ (3) \end{cases}$, so dass dann $m' - 7.3^2$ durch f angenommen wird. Für $q = 0$ ergibt sich die Zahl 1, die von (2,2,3,7) ausgelassen wird.

Somit stellt (2,2,3,7) jede Zahl $\neq 1,6,24$ dar.

<u>33.2</u> Die Form (2,2,3,13) stellt jede Zahl $\neq 1,6,9$ dar.

Beweis. Auch hier wird wie in 33.1 die Form $f = (2,2,3)$ herangezogen.

a) Darstellung der Zahlen $m = 3^{2k+1}(3q+2)$: Für $t \not\equiv 0\ (3)$ ist $m - 13t^2 \equiv 2\ (3)$. Ist somit $m \not\equiv 6\ (8)$, $m \geq 13$, so wird $m-13$ durch f dargestellt. Im Falle $13 \leq m \equiv 6\ (8)$ ist $m \geq 54$, ferner ist $m - 13.2^2 \equiv 6+4 \equiv 2\ (8)$, so dass $m-52$ von f angenommen wird. Als Werte $m < 13$ erhält man die Zahl 6, die von (2,2,3,13) ausgelassen wird.

b) Darstellung der Zahlen $m' = 8q+1$: Ist $m' \neq 13 + 3^{2k+1}(3\bar{q}+2)$ und $q \geq 2$, so ist $m' - 13 = 8(q-2)+4$ durch f darstellbar. Im Falle $m' = 13 + 3^{2k+1}(3\bar{q}+2)$ ist $m' \geq 73$. Da aber $m' - 13.2^2 = 3(3^{2k+1}\bar{q}+2.3^{2k}-13) = 3s \equiv 1-4 \equiv 5\ (8)$ mit $s \equiv \begin{cases} 1\ (3) & \text{für } k = 0 \\ 2\ (3) & \text{für } k > 0 \end{cases}$ gilt, so werden für $k = 0$ die Zahlen $m'-52$ durch f angenommen. Ist aber $k > 0$, so ist $m' \geq 553$ und $m' - 13.3^2 \equiv \begin{cases} 4\ (8) \\ 1\ (3) \end{cases}$; somit wird dann $m' - 13.3^2$ durch f

dargestellt. Für q = 0,1 ergeben sich die Zahlen m' = 1,9, die beide von (2,2,3,13) ausgelassen werden.

Somit stellt (2,2,3,13) jeden Wert ≠ 1,6,9 dar.

33.3 Die Form (2,2,4,5) stellt jede Zahl ≠ 1,3,33 dar.

Beweis. Die ternäre Teilform f = (2,2,4) stellt nach 9.10 jede Zahl $\notin N = \{2q+1,\ 4^k(8q+7) \mid k > 0\}$ dar.

a) Darstellung der geraden Zahlen $\in N$: Mit $t = 2^k$ wird $4^k(8q+7) - 5.4^k = 4^k(8q+2)$ von f angenommen.

b) Darstellung ungerader Zahlen m: Die Annahme, es sei $m-5 = 4^k(8q+7)$, $m - 5.3^2 = 4^{k'}(8q'+7)$ $(k > 0, k' > 0)$ führt zu $40 = 4^k(8q+7) - 4^{k'}(8q'+7)$, $10 = 4^{k-1}(8q+7) - 4^{k'-1}(8q'+7)$. Wäre k = 1, so folgte auch k' = 1 und damit $10 = 8(q-q')$. Daher muss $k > 1$ gelten. Dann folgt aber $k' > 1$ und der Widerspruch $10 \equiv 0\ (4)$. Für $m \geq 45$ ist somit eine der beiden Zahlen $m-5$, $m - 5.3^2$ durch f darstellbar.

1) Zahlen $m < 5$: 1 und 3 werden von (2,2,4,5) ausgelassen.

2) Zahlen $m = 5 + 4^k(8q+7)$ $(k > 0)$, $m < 45$: 33 wird ebenfalls von (2,2,4,5) ausgelassen.

Damit stellt (2,2,4,5) jede Zahl ≠ 1,3,33 dar.

33.4 Die Form (2,3,3,7) stellt jede Zahl ≠ 1,4,16 dar.

Beweis. Nach 5.4 stellt die ternäre Teilform f = (2,3,3) jede Zahl $\notin N = \{3^{2k}(3q+1)\}$ dar. Mit $t = 3^k$ wird $3^{2k}(3q+1) - 7.3^{2k} = 3^{2k}(3(q-2))$ für $q \geq 2$ und $q \neq 2 + 3^{2k'}(9q'+3)$ durch f angenommen. Hat aber q die Gestalt $q = 2 + 3^{2k'}(9q'+3)$, so gilt $m = 3^{2k}(3q+1) - 7.2^2.3^{2k} = 3^{2k}(3(q-9))$ mit $q-9 \equiv 2\ (3)$, so dass m für $q \geq 9$ durch f dargestellt wird. Mit $t = 3^{k-1}$ wird $3^{2k}(3q+1) - 7.3^{2k-2} = 3^{2k-2}(3.9q+2)$ für $k \geq 1$ von f angenommen. Für k = 0 und q = 0,1,5 erhält man die Werte 1,4,16, die von (2,3,3,7) ausgelassen werden.

33.5 Die Form (2,3,4,9) stellt jede Zahl ≠ 1,10,26 dar.

Beweis. Die Form f = (2,3,4) stellt nach 8.9 jede gerade Zahl dar $\notin N =$

$= \{4^k(16q+10)\}$.

a) Darstellung gerader Zahlen $\in N$: Mit $t = 2^k$ wird $4^k(16q+10) - 9.4^k = 4^k(16q+1)$ für $k > 0$ von f angenommen. Für $k = 0$ ergibt sich mit $t = 2$ der Wert $16q+10 - 9.2^2 = 16(q-2)+6$, der für $q \geq 2$ durch f dargestellt wird. Mit $q = 0,1$ erhält man die Werte 10,26, die von (2,3,4,9) ausgelassen werden.

b) Darstellung ungerader Zahlen m : Ist $m \geq 81$, $m \neq 256q'+241$, so wird nach 13.1 eine der Zahlen $m-9$, $m - 9.3^2$ durch f angenommen. Ist aber $m = 256q'+241$, so ist $m - 9.5^2 = 256q'+16 = 4^2(16q'+1)$ durch f darstellbar.

1) Zahlen $m < 9$: $3 = 3.1^2$, $5 = 2.1^2+3.1^2$, $7 = 3.1^2+4.1^2$, 1 wird von (2,3,4,9) ausgelassen.

2) Zahlen $m = 9 + 4^k(16q+10) < 81$: $19 = 3.1^2+4.2^2$, $35 = 2.4^2+3.1^2$, $49 = 2.3^2+3.3^2+4.1^2$, $51 = 2.4^2+3.1^2+4.2^2$, $67 = 3.1^2+4.4^2$.

Jede Zahl $\neq 1,10,26$ wird somit durch (2,3,4,9) dargestellt.

<u>33.6</u> Die Form (2,3,4,12) stellt jede Zahl $\neq 1,10,13$ dar.

Beweis. Nach 9.10 stellt $f = (2,4,12)$ jede gerade Zahl $\notin N = \{4^k(16q+10)\}$ dar.

a) Darstellung gerader Zahlen $\in N$: Ist $k > 0$, so ist mit $y = 2^k$ die Zahl $4^k(16q+10) - 3.4^k = 4^k(16q+7)$ durch f darstellbar. Für $k = 0$ wähle man $y = 2$, dann wird $16q+10 - 3.2^2 = 16(q-1)+14$ für $q \geq 1$ von f angenommen. Mit $q = 0$ ergibt sich der Wert 10, der von (2,3,4,12) ausgelassen wird.

b) Darstellung ungerader Zahlen m : Ist $m \neq 3 + 4^k(16q+10)$ mit $k \geq 3$ und ist $m \geq 2^7$, so wird nach 13.1 eine der Zahlen $m-3$, $m - 3.3^2$ durch f dargestellt. Hat aber m die Gestalt $m = 3 + 4^k(16q+10)$ mit $k \geq 3$, so ist nach 13.2 $m - 3.5^2 \notin N$; da in diesem Fall $m \geq 643$ ist, so wird $m - 3.5^2$ von f angenommen.

1) Zahlen $m < 3$: 1 wird von (2,3,4,12) ausgelassen.

2) Zahlen $m = 3 + 4^k(16q+10) < 27 : 13$ wird ebenfalls von (2,3,4,12) ausgelassen.

Damit stellt (2,3,4,12) jede Zahl $\neq 1,10,13$ dar.

§ 34. Die Formen (2,4,5,d) (d = 6,7,8).

34.1 Die Gleichungen $m-5 = 4^k(8q+5)$, $m - 5.3^2 = 4^{k'}(8q'+5)$ können für $k > 0, k' > 0$ nicht zusammen bestehen.

Beweis. Angenommen, es sei $m-5 = 4^k(8q+5)$, $m - 5.3^2 = 4^{k'}(8q'+5)$ mit $k > 0$ und $k' > 0$. Dann gilt $4^k(8q+5) - 4^{k'}(8q'+5) = 40$, $4^{k-1}(8q+5) - 4^{k'-1}(8q'+5) = 10$. Aus $k = 1$ würde $k' = 1$ und damit $10 \equiv 0\ (8)$ und aus $k > 1$ würde $k' > 1$ und damit $10 \equiv 0\ (4)$ folgen. Beides ist nicht möglich.

34.2 Die Form (2,4,5,6) stellt jede Zahl $\neq 1,3,25$ dar.

Beweis. Nach 9.10 stellt die ternäre Teilform f = (2,4,6) jede gerade Zahl $\notin N = \{4^k(8q+5) \mid k > 0\}$ dar.

a) Darstellung gerader Zahlen $\in N$: Mit $z = 2^k$ wird $4^k(8q+5) - 5.4^k = 4^k.8q = 4^{k+1}.2q$ durch f angenommen, falls $q \neq 4^{k'}(16q'+10)$ ist. Hat aber q diese Gestalt, so ist $q \geq 10$ und mit $z = 2.2^k$ wird dann $4^k(8q+5) - 5.4.4^k = 4^k(8(q-2)+1)$ durch f dargestellt. Jede gerade Zahl wird somit von (2,4,5,6) angenommen.

b) Darstellung ungerader Zahlen m : Nach 34.1 ist für $m \geq 45$ stets einer der Werte $m-5$, $m - 5.3^2$ durch f darstellbar.

1) Zahlen $m < 5$: 1 und 3 werden von (2,4,5,6) ausgelassen

2) Zahlen $m = 5 + 4^k(8q+5) < 45$ mit $k > 0$: 25 wird ebenfalls von (2,4,5,6) ausgelassen.

34.3 Die Form (2,4,5,7) stellt jede Zahl $\neq 1,3,10$ dar.

Beweis. Nach 8.6 stellt (1,2,10) jede Zahl $\notin N' = \{8q+7,\ 5^{2k+1}(5q+e') \mid e' = 1,4\}$ dar. Daraus folgt, dass f = (2,4,5) jede gerade Zahl $\notin N = \{16q+14,\ 5^{2k+1}(10q+e) \mid e = 2,8\}$ darstellt.

a) Darstellung der geraden Zahlen $\in \mathbb{N}$:

I) Zahlen $m_1 = 5^{2k+1}(10q+e)$. Mit $t = 2$ wird $m_1 - 7.2^2 \equiv 2\ (5)$. Ist somit $m_1 \not\equiv 10\ (16)$, so wird $m_1 - 7.2^2$ für $m_1 \geq 28$ durch f angenommen. Im Falle $m_1 \equiv 10\ (16)$ ist mit $t = 4$ die Zahl $m_1 - 7.4^2 \equiv \begin{cases} 3\ (5) \\ 10\ (16) \end{cases}$ und somit für $m_1 \geq 112$ durch f darstellbar.

II) Zahlen $m_2 = 16q+14$: Ist $m_2 \geq 28$, $m_2 \neq 28 + 5^{2k+1}(10q+e)$, so ist $m_2 - 7.2^2 \equiv 2\ (16)$ durch f darstellbar. Gilt aber $m_2 = 28 + 5^{2k+1}(10q+e)$, so wird mit $t = 6$ die Zahl $m_2 - 7.6^2 \equiv \begin{cases} 2\ (16) \\ 1\ (5) \end{cases}$ für $m_2 \geq 252$ durch f dargestellt.

Es fehlen noch Darstellungen der Zahlen

1) $m_1 < 28$: 10 wird von (2,4,5,7) ausgelassen

2) $m_1 \equiv 10\ (16)$, $m_1 < 112$: 10 vgl. 1), $90 = 2.3^2+4.1^2+5.1^2+7.3^2$

3) $m_2 < 28$: $14 = 2.1^2+5.1^2+7.1^2$

4) $m_2 = 28 + 5^{2k+1}(10q+e) < 252$: $238 = 2.3^2+5.3^2+7.5^2$.

Jede gerade Zahl $\neq 10$ wird somit durch (2,4,5,7) dargestellt.

b) Darstellung ungerader Zahlen m :

I) Es sei $m-7 = 5^{2k+1}(10q+e)$. Ist dann $m \not\equiv 13\ (16)$, so ist $m - 7.3^2$ für $m \geq 63$ durch f darstellbar, da $m - 7.3^2 \begin{cases} \equiv 4\ (5) \\ \not\equiv 14\ (16) \end{cases}$ gilt. Im Falle $m \equiv 13\ (16)$ wähle man $t = 7$, dann ist $m - 7.7^2 \equiv \begin{cases} 4\ (5) \\ 6\ (16) \end{cases}$, so dass $m - 7.7^2$ für $m \geq 343$ durch f angenommen wird.

II) Es sei $m-7 = 16q+14$, also $m \equiv 5\ (16)$. Ist dann $m \neq 63 + 5^{2k+1}(10q+e)$, so ist für $m \geq 63$ die Zahl $m - 7.3^2 \equiv 6\ (16)$ durch f darstellbar. Hat m die Gestalt $m = 63 + 5^{2k+1}(10q+e)$, so ist $m - 7.5^2 \equiv \begin{cases} 3\ (5) \\ 6\ (16) \end{cases}$; daher wird $m - 7.5^2$ für $m \geq 175$ durch f dargestellt.

Zu betrachten sind noch die Werte

1) $m < 7$: $5 = 5.1^2$, 1 und 3 werden von (2,4,5,7) ausgelassen.

2) $m = 7 + 5^{2k+1}(10q+e) < 63$: $17 = 2.2^2+4.1^2+5.1^2$, $47 = 2.1^2+5.3^2$

3) $m = 7 + 5^{2k+1}(10q+e) < 343$, $m \equiv 13\ (16)$: $317 = 2.10^2+5.1^2+7.4^2$

4) $m = 16q+21 < 63$: $21 = 4.2^2+5.1^2$, $37 = 2.4^2+5.1^2$, $53 = 2.2^2+5.3^2$

5) $m = 63 + 5^{2k+1}(10q+e) < 175$, $m \equiv 5\ (16)$: Solche Zahlen gibt es nicht. Jede Zahl $\neq 1,3,10$ wird somit durch (2,4,5,7) dargestellt.

34.4 Die Form (2,4,5,8) stellt jede Zahl $\neq 1,3,33$ dar.

Beweis. Die Form f = (2,4,8) stellt nach 6.6 jede Zahl $\notin N =$ $= \{2q+1,\ 4^k(8q+7) \mid k > 0\}$ dar. Sie hat damit dieselben Ausnahmeprogressione wie (2,2,4)(nach 9.10). Da wie in 33.3 der vierte Koeffizient der Form 5 ist, und beim Beweis von 33.3 nur von den Ausnahmeprogressionen von (2,2,4) und von d = 5 Gebrauch gemacht wurde, überträgt sich der in 33.3 gegebene Beweis.

Vorbemerkung zu § 35 und § 36.

Von den nach 21.4 zu untersuchenden Formen wurden in den vorangegangenen Paragraphen alle bis auf 4 Formen behandelt. Bei diesen 4 Formen nämlich $F_1 = (1,1,11,14)$, $F_2 = (1,3,5,11)$, $F_3 = (1,2,12,20)$ und $F_4 = (1,2,12,22)$ konnte ich nicht beweisen, dass sie genau 3 Ausnahmewerte besitzen. In den beiden folgenden Paragraphen werden Teilaussagen über diese Formen hergeleitet.

§ 35. Die Formen $F_1 = (1,1,11,14)$ und $F_2 = (1,3,5,11)$.

35.1 Die Form F_1 stellt jede gerade Zahl $\neq 6$ dar.

Beweis. Nach 9.6 stellt f = (1,1,11) jede Zahl 4n dar $\notin N =$ $= \{11^{2k+1}(11q+e) \mid e = 2,6,7,8,10\}$.

a) Darstellung von Zahlen $4n \in N$: Mit t = 2 wird $11^{2k+1}(11q+e) - 14.2^2 \equiv$ $\equiv 10\ (11)$ durch f dargestellt, da $11^{2k+1}(11q+e) \geq 88$ ist.

b) Darstellung von Zahlen m = 4n+2: Mit ungeradem t wird $m - 14t^2 \equiv$ $\equiv 0\ (4)$. Die Annahme, es sei $m-14 \in N$ und $m - 14.3^2 \in N$ führt zum Widerspruch $112 \equiv 0\ (11)$. Ist somit $m \geq 126$, so wird eine der Zahlen $m-14$, $m - 14.3^2$ durch f angenommen.

Zahlen $m < 126$: Die Zahl 6 wird ausgelassen, jede andere Zahl $m < 126$ wird nach 35.3 durch F_1 dargestellt.

35.2 Die Form F_1 stellt jede Zahl $8n+3$, $8n+5$ dar $\neq 3$.

Beweis. Jede Zahl $8n$, $8n+2 \notin N = \{ 7^{2k+1}(14q+e) \mid e = 6,10,12\}$ wird nach 7.5 von (1,1,14) angenommen. Ist $m = 8n+\{\begin{smallmatrix}3\\5\end{smallmatrix}$ und z ungerade, so ist $m - 11z^2 \equiv \{\begin{smallmatrix}3\\5\end{smallmatrix} - 3 \equiv \{\begin{smallmatrix}0 & (8)\\2 & (8)\end{smallmatrix}$. Die Annahme $m-11 \in N$, $m - 11.3^2 \in N$ führt zum Widerspruch 7|88. Ist somit $m \geq 99$, so wird eine der Zahlen $m-11$, $m-99$ durch (1,1,14) dargestellt. Die Zahlen $m < 99$ besitzen nach 35.3 für $m \neq 3$ eine Darstellung durch F_1.

35.3 Durch Nachrechnen auf dem Siemens - Digitalrechner 2002 ergab sich, dass F_1 keinen Ausnahmewert ausser 3,6,7 unterhalb 9800 besitzt.

35.4 Falls F_1 weitere Ausnahmewerte hat, so müssen diese kongruent 1 oder 7 mod 8 und grösser als 9800 sein.

35.5 Die Form $F_2 = (1,3,5,11)$ stellt jede Zahl $4n$, $4n+1$, $4n+3$ dar.

Beweis. Nach 7.2 stellt die ternäre Teilform $f = (1,3,5)$ jede Zahl $4n$, $4n+1 \notin N = \{ 5^{2k+1}(5q+e) \mid e = 2,3\}$ dar.

a) Darstellung der Zahlen $4n$, $4n+1 \in N$: Mit $t = 2$ ist $\bar{m} = 5^{2k+1}(5q+e) - 11.2^2 \equiv \{\begin{smallmatrix}0,1 & (4)\\1 & (5)\end{smallmatrix}$. Ist somit $5^{2k+1}(5q+e) \geq 44$, so wird $\bar{m}$ durch f dargestellt.

Zahlen $5^{2k+1}(5q+e) < 44$: $40 = 3^2+5.2^2+11.1^2$.

b) Darstellung der Zahlen $m = 4n+3$: Ist t ungerade, so ist $m - 11t^2 \equiv 3-3 \equiv 0$ (4). Die Annahme $m-11 \in N$, $m - 11.3^2 \in N$ führt zum Widerspruch 5|88. Für $m \geq 99$ wird daher $m-11$ oder $m-99$ von f angenommen. Die Zahlen $m < 99$ besitzen nach 35.7 eine Darstellung durch F_2.

Somit lässt F_2 keinen Wert $4n, 4n+1, 4n+3$ aus.

35.6 F_2 stellt jede Zahl $3n$, $3n+2$ dar $\neq 2$.

Beweis. Die Form $f = (1,3,5)$ stellt nach 7.2 jede Zahl $3n \notin N = \{5^{2k+1}(5q+e) \mid e = 2,3\}$ dar.

a) Darstellung der Zahlen $3n \in N$: Mit $t = 3$ wird $5^{2k+1}(5q+e) - 11.3^2 \equiv$

$\equiv \begin{cases} 0 & (3) \\ 1 & (5) \end{cases}$ durch f dargestellt, falls $5^{2k+1}(5q+e) \geq 99$ ist.

b) Darstellung der Zahlen $m = 3n+2$: Ist $t \not\equiv 0$ (3), so ist $m - 11t^2 \equiv 0$ (3). Die Annahme $m-11 \in N$, $m - 11.2^2 \in N$ führt zum Widerspruch $33 \equiv 0$ (5). Ist somit $m \geq 44$, so besitzt entweder m-11 oder m-44 eine Darstellung durch f. Die Zahlen $m < 44$ ausser 2 werden nach 35.7 von F_2 angenommen.

F_2 lässt somit nur die Zahl 2 unter den Werten 3n, 3n+2 aus.

35.7 Durch Nachrechnen mit dem Siemens - Digitalrechner 2002 ergab sich, dass die Zahlen 2,10,22 die einzigen Werte unterhalb 9800 sind, die von F_2 ausgelassen werden.

35.8 Weitere Ausnahmewerte von F_2 müssen daher $\equiv 10$ (12) und grösser als 9800 sein.

35.9 Ebenso wie in 19.6 lässt sich sowohl bei F_1 als auch bei F_2 zeigen, dass die ternären Teilformen in Bezug auf die nicht behandelten Progressionen 8n+v, 4n+v, 3n+v nicht regulär sind. Daher lassen sich mit den hier benutzten Beweisverfahren keine weiteren Aussagen über Ausnahmewerte erhalten.

§ 36. Die Formen $F_3 = (1,2,12,20)$ und $F_4 = (1,2,12,22)$.

36.1 F_3 stellt jede gerade Zahl $\neq 10$ dar.

Beweis. Nach 6.2 stellt $f = (1,2,12)$ jede gerade Zahl $\notin N = \{4^k(16q+10)\}$ dar. Mit $t = 2^k$ wird $4^k(16q+10) - 20.4^k = 4^k(16(q-1)+6)$ für $q > 0$ von f angenommen. Im Falle $q = 0$ wähle man $t = 2^{k-1}$, dann ist $4^k.10 - 20.4^{k-1} = 4^k.5$ für $k > 0$ durch f darstellbar. Für $k = 0$ erhält man den Wert 10, der somit als einzige gerade Zahl von F_3 ausgelassen wird.

36.2 F_3 stellt jede Zahl 3n, 3n+2 dar $\neq 5$.

Beweis. Nach 6.2 wird jede Zahl $3n \notin N = \{4^k(16q+10)\}$ von $f = (1,2,12)$ angenommen.

a) Darstellung der Zahlen $3n \in N$: Mit $t = 3.2^k$ wird $4^k(16q+10) - 20.3^2.4^k = 4^k(16(q-11)+6) \equiv 0$ (3) für $q \geq 11$ durch f dargestellt. Aus $4^k(16q+10) \equiv 0$ (3) folgt $q \equiv 2$ (3), so dass jetzt noch die Zahlen $4^k(16q+10)$ für $q = 2,5,8$ zu untersuchen sind. Mit $t = 3.2^{k-1}$ wird $4^k(16q+10) - 20.9.4^{k-1} = 4^k(16(q-3)+13)$ für $k > 0$ und $q \not\equiv 2$ durch f dargestellt. Im Fall $q = 2$ mit $k \geq 2$ wird $t = 3.2^{k-2}$ gewählt, dann wird $4^k.42 - 20.9.4^{k-2} = 4^{k-1}(16.7+11)$ von f angenommen. Da $42 = 2^2+2.3^2+20.1^2$, $90 = 2^2+2.3^2+12.2^2+20.1^2$, $138 = 10^2+2.3^2+20.1^2$, $168 = 4^2+2.6^2+20.2^2$ gilt, so stellt F_3 jede Zahl 3n dar.

b) Darstellung der Zahlen $m = 3n+2$: Ist $t \not\equiv 0$ (3), so ist $m - 20t^2 \equiv 2-2 \equiv 0$ (3). Aus der Annahme $m-20 = 4^k(16q+10)$, $m - 20.2^2 = 4^{k'}(16q'+10)$ folgt $60 = 4^k(16q+10) - 4^{k'}(16q'+10)$; für $k = 0$ erhält man $k' = 0$ und $60 \equiv 0$ (16) und für $k > 0$ ergibt sich $k' > 0$ und $15 \equiv 0$ (2). Ist daher $m \geq 80$, so wird eine der Zahlen $m-20$, $m - 20.2^2$ durch f dargestellt.

1) Zahlen $3n+2 < 20$: $2 = 2.1^2$, $8 = 2.2^2$, $11 = 3^2+2.1^2$, $14 = 2.1^2+12.1^2$, $17 = 3^2+2.2^2$, 5 wird von F_3 ausgelassen.

2) Zahlen $3n+2 = 20 + 4^k(16q+10) < 80$: $62 = 2.5^2+12.1^2$.

Somit stellt F_3 jede Zahl 3n, 3n+2 dar $\neq 5$.

36.3 Die Form F_3 stellt jede Zahl 10n+1, 10n+5, 10n+9 dar $\neq 5$.

Beweis. Zur Abkürzung werde $n_1 = 1$, $n_2 = 9$, $n_3 = 5$ gesetzt, durch folgende Tabelle werden ausserdem Werte $x_{\mu\nu}$ definiert:

μ \ ν	1	2	3	4	5
1	1	9	21	11	21
2	3	7	37	7	33
3	5	15	45	15	25

Damit ist stets

$x_{1\nu} \equiv \pm 1$ (10)
$x_{2\nu} \equiv \pm 3$ (10)
$x_{3\nu} \equiv 5$ (10) und es gilt

$$10n+n_\mu - x_{\mu\nu}^2 \equiv 0 \ (10).$$

Zu untersuchen sind also die Werte $m_\mu = 10n+n_\mu$. Nach 8.8 stellt die ternäre Teilform $f = (2,12,20)$ jede Zahl $10n \notin N_1 = \{3^{2k+1}(30q+20)\}$ und $\notin N_2 = \{80q+10\}$ dar.

a) Es sei $m_\mu - x_{\mu 1}^2 = 10n+n_\mu - x_{\mu 1}^2 \in N_1$. Dann kann nicht auch $m_\mu - x_{\mu 2}^2 \in N_1$ gelten, da $x_{\mu 2}^2 - x_{\mu 1}^2 = (x_{\mu 2}-x_{\mu 1})(x_{\mu 2}+x_{\mu 1}) =$

$$= \begin{cases} 8.10 \not\equiv 0\ (3) \text{ für } \mu = 1 \\ 4.10 \not\equiv 0\ (3) \text{ für } \mu = 2 \\ 10.20 \not\equiv 0\ (3) \text{ für } \mu = 3 \end{cases} \text{ gilt.}$$

Ist also $m_\mu - x_{\mu 2}^2 \notin N_2$ und $m_\mu - x_{\mu 2}^2 \geq 0$, so wird $m_\mu - x_{\mu 2}^2$ von f angenommen. Gilt jedoch $m_\mu - x_{\mu 2}^2 \equiv 10\ (80)$, so ist wegen $x_{\mu 3}^2 - x_{\mu 1}^2 \not\equiv 0\ (3)$ die Zahl $m_\mu - x_{\mu 3}^2 \notin N_1$, ferner ist $x_{\mu 3}^2 - x_{\mu 2}^2 \not\equiv 0\ (80)$, so dass auch $m_\mu - x_{\mu 3}^2 \not\equiv 10\ (80)$ gelten muss. Für $m_\mu \geq x_{\mu 3}^2$ ist also $m_\mu - x_{\mu 3}^2$ durch f darstellbar.

b) Es sei $m_\mu - x_{\mu 1}^2 \in N_2$. Dann ist $m_\mu - x_{\mu 4}^2 = (m_\mu - x_{\mu 1}^2) - (x_{\mu 4}^2 - x_{\mu 1}^2) \equiv$ $\equiv 10 - 40 \equiv 50\ (80)$. Für $m_\mu \geq 225$ und $m_\mu - x_{\mu 4}^2 \notin N_1$ stellt f daher $m_\mu - x_{\mu 4}^2$ dar. Im Falle $m_\mu - x_{\mu 4}^2 \in N_1$ ist wegen $x_{\mu 5}^2 - x_{\mu 4}^2 \not\equiv 0\ (3)$ sicher $m_\mu - x_{\mu 5}^2 \notin N_1$; da auch $x_{\mu 5}^2 - x_{\mu 1}^2 \not\equiv 0\ (80)$ ist, so gilt zudem $m_\mu - x_{\mu 5}^2 \notin N_2$. Die Werte $m_\mu \geq x_{\mu 5}^2$ werden somit durch f dargestellt.

Nach 36.4 wird jede Zahl $m_\mu \neq 5$ mit $m_\mu < 9800$ durch F_3 angenommen. Da $x_{\mu\nu}^2 \leq 45^2 = 2025$ gilt, so ist jede Zahl $m_\mu \neq 5$ durch F_3 darstellbar.

36.4 Durch Nachrechnen mit dem Siemens - Digitalrechner 2002 ergab sich, dass F_3 von den Zahlen unterhalb 9800 nur die Werte 5,7,10 auslässt.

36.5 Aus den Ergebnissen 36.1,...,36.4 folgt: Jeder weitere Ausnahmewert von F_3 muss von der Gestalt 30n+7, 30n+13 sein und oberhalb 9800 liegen.

36.6 Die Form $F_4 = (1,2,12,22)$ stellt jede gerade Zahl $\neq 10$ dar.

Beweis. Nach 6.2 stellt $f = (1,2,12)$ jede gerade Zahl $\notin N = \{4^k(16q+10)\}$ dar. Mit $t = 2^k$ wird $4^k(16q+10) - 22.4^k = 4^k(16(q-1)+4) = 4^{k+1}(4(q-1)+1)$ für $q \geq 1$ von f angenommen. Für die Zahlen $4^k.10$ mit $k \geq 1$ wird $t = 2^{k-1}$ gewählt, dann ist $4^k.10 - 22.4^{k-1} = 4^{k-1}(16+2)$ durch f darstellbar. Somit stellt F_4 jede gerade Zahl $\neq 10$ dar.

36.7 F_4 stellt jede Zahl 3n, 3n+1 dar $\neq 7,10$.

Beweis. Wie in 6.2 gezeigt wurde, stellt $f = (1,2,12)$ jede Zahl 3n

$\notin N = \{4^k(16q+10)\}$ dar.

a) Darstellung der Zahlen $3n \in N$: Da diese Zahlen alle gerade sind, so stellt F_4 nach 36.6 jeden Wert 3n dar.

b) Darstellung der Zahlen $m = 3n+1$: Für alle geraden $m \neq 10$ ist nach 36.6 eine Darstellung durch F_4 gesichert. Zu betrachten sind somit noch die Werte $m = 6n+1$. Dann ist aber $m-22 \equiv 0\ (3)$ und $m-22 \notin N$. Für die Werte $m = 6n+1 < 22$ gilt: $1 = 1^2$, $13 = 1^2+12.1^2$, $19 = 1^2+2.3^2$, 7 wird von F_4 ausgelassen.

Somit stellt F_4 jede Zahl 3n, $3n+1 \neq 7,10$ dar.

36.8 F_4 stellt jede Zahl $4n+1 \neq 5$ dar.

Beweis. Nach 9.7 wird jede Zahl $4n+1 \notin N = \{8q+5\}$ von $f = (1,2,22)$ angenommen. Wählt man $z = 1$, so ist $8q+5-12 = 8(q-1)+1$ für $q \geq 1$ durch f darstellbar. Somit stellt F_4 jede Zahl $4n+1 \neq 5$ dar.

36.9 F_4 stellt jede Zahl $22n+\bar{n} \neq 5,10$ mit $0 \leq \bar{n} \leq 21$, $\bar{n} \neq 7,13,17,19,21$ dar.

Beweis. Nach 9.9 stellt die ternäre Teilform $f = (2,12,22)$ jede Zahl $22n \notin N = \{4^k(88q+55) \mid k>0\}$ dar.

a) Ist $\bar{n}$ gerade, so ist $22n+\bar{n}$ gerade und wird nach 36.6 durch F_4 dargestellt, sofern $22n+\bar{n} \neq 10$ ist.

b) Zur Abkürzung sei $\bar{n}_1 = 1$, $\bar{n}_2 = 3$, $\bar{n}_3 = 5$, $\bar{n}_4 = 9$, $\bar{n}_5 = 11$, $\bar{n}_6 = 15$ gesetzt und es sei $x_{\mu\nu}$ durch folgende Tabelle bestimmt:

ν \ μ	1	2	3	4	5	6
1	1	5	7	3	11	9
2	21	17	29	25	33	13

Zu untersuchen sind die Zahlen $m_\mu = 22n+\bar{n}_\mu$ $(1 \leq \mu \leq 6)$.

Nach der Wahl von $x_{\mu\nu}$ ist stets $m_\mu - x_{\mu\nu}^2 = 22n+\bar{n}_\mu - x_{\mu\nu}^2 \equiv 0\ (22)$. Ist daher $m_\mu - x_{\mu 1}^2 \notin N$ und $m_\mu \geq x_{\mu 1}^2$, so ist $m_\mu - x_{\mu 1}^2$ durch f darstellbar. Man kann daher o.B.d.A. $22n+\bar{n}_\mu - x_{\mu 1}^2 \in N$ voraussetzen. In diesem Fall ist aber $22n+\bar{n}_\mu - x_{\mu 2}^2 \notin N$: Aus der Annahme $m_\mu - x_{\mu 2}^2 \in N$ folgt nämlich $x_{\mu 2}^2 - x_{\mu 1}^2 = 4^k(88q+55) - 4^{k'}(88q'+55)$. Nach Bestimmung der Werte $x_{\mu\nu}$ gilt

nun $x_{\mu 2}^2 - x_{\mu 1}^2 \equiv 8\ (16)$. Da $k > 0$ und $k' > 0$ ist, so folgt $4^{k-1}(88\cdot+55) - 4^{k'-1}(88q'+55) \equiv 2\ (4)$.

1) $k = 1$ bedingt auch $k' = 1$ und $88(q-q') \equiv 2\ (4)$

2) $k > 1$ zieht auch $k' > 1$ nach sich: $0 \equiv 2\ (4)$.

Für $m_\mu = x_{\mu 1}^2 \in N$ und $m_\mu \geq x_{\mu 2}^2$ wird daher $m_\mu = x_{\mu 2}^2$ durch f dargestellt. Da $x_{\mu 2}^2 \leq x_{52}^2 = 1089$ ist, so ergibt sich zusammen mit 36.10, dass F_4 alle Zahlen der betrachteten Art $\neq 5,10$ annimmt.

36.10 Durch Nachrechnen mit dem Siemens - Digitalrechner 2002 ergab sich, dass jede Zahl $\neq 5,7,10$ unterhalb 9800 von F_4 angenommen wird.

36.11 Jeder noch mögliche Ausnahmewert von F_4 muss somit nach 36.6,...,36.10 einer der Progressionen $132n+\bar{n}$ mit $\bar{n} = 35,83,95,107,131$ angehören. Ferner muss er grösser als 9800 sein.

§ 37. Zusammenfassung.

37.1 Ist A die Anzahl der Formen mit genau drei Ausnahmewerten, so erhält man für A aus den Ergebnissen der §§ 22 - 36 und mit Berücksichtigung von § 19: Es gilt $93 \leq A \leq 98$.

Die 93 Formen mit genau drei Ausnahmewerten sind in folgender Tabelle zusammengestellt:

a	b	c	d	Ausn. Werte
1	1	1	19	7 15 47
1	1	1	25 26 28	7 15 23
1	1	2	38	14 30 94
1	1	2	47 49 50 51 52	14 30 46
1	1	2	53 55 56	14 30 46
1	1	3	24	6 15 78
1	1	3	25 26 28 29 31	6 15 24
1	1	3	32	6 15 24
1	1	4	9	3 7 28
1	1	4	14	3 7 11
1	1	5	14 18	3 11 12
1	1	6	21	3 12 48
1	1	6	22 23 25 26	3 12 21
1	1	7	9 10 12	3 6 31
1	1	8	10	3 6 7
1	1	10	13	3 6 7
1	2	2	19	7 15 47
1	2	2	25 26 28	7 15 23
1	2	3	34	10 26 74
1	2	3	41 42	10 26 40
1	2	4	38	14 30 94

a	b	c	d	Ausn. Werte
1	2	4	47 49 50 51 52	14 30 46
1	2	4	53 55 56	14 30 46
1	2	5	36 37 38 39	10 15 35
1	2	6	17	5 13 37
1	2	6	21	5 13 20
1	2	7	16	5 14 21
1	2	8	11	5 7 39
1	2	8	13	5 7 28
1	2	9	12	5 7 35
1	2	9	20	5 7 14
1	2	10	11	5 7 31
1	2	10	13	5 7 20
1	2	11	12 15 17 20	5 7 10
1	2	12	13 15 17 24	5 7 10
1	2	13	17 20	5 7 10
1	3	3	8	2 5 26
1	3	4	5	2 15 38
1	3	5	9	2 11 74
1	3	5	14	2 10 11
1	3	6	7	2 5 30
1	3	6	8	2 5 46
1	3	7	14	2 5 6
1	4	4	6	2 3 34
1	4	6	10 17	2 3 12
1	5	6	12	2 3 8
2	2	3	7	1 6 24
2	2	3	13	1 6 9
2	2	4	5	1 3 33
2	3	3	7	1 4 16
2	3	4	9	1 10 26
2	3	4	12	1 10 13
2	4	5	6	1 3 25
2	4	5	7	1 3 10
2	4	5	8	1 3 33

Aussagen über die Formen (1,1,11,14), (1,3,5,11) bzw. (1,2,12,20), (1,2,12,22) sind in § 35 bzw. § 36 gemacht. Die Form (1,3,5,7) wurde in § 19 untersucht.

V. OBERE UND UNTERE SCHRANKEN FÜR DIE DETERMINANTE VON FORMEN MIT GENAU VIER AUSNAHMEWERTEN.

§ 38. Notwendige Bedingungen für d in $F = ax^2+by^2+cz^2+dt^2$ zur Gewinnung der oberen Schranke.

38.1 Um eine obere Schranke für die Determinante von Formen mit genau vier Ausnahmewerten aufstellen zu können, sind zunächst die Formen festzustellen, die möglicherweise genau vier Ausnahmewerte besitzen, d.h. es sind bei vorgegebenen Werten a,b,c obere Schranken für d zu finden.

Die Form $x^2+y^2+z^2$ stellt jede Zahl $\neq\{4^k(8q+7)\}$ dar. Ist nun in $F = (1,1,1,d)$ $d > 31$, so hat F die fünf Ausnahmewerte 7,15,23,28,31. Da nun F nur vier Ausnahmewerte besitzen soll, so muss $d \leq 31$ gelten.

Die Form $x^2+y^2+2z^2$ stellt jede Zahl $\neq\{4^k(16q+14)\}$ dar. Da $(1,1,2,d)$ nur vier Werte auslassen darf, so muss $d \leq 62$ sein.

Diese obere Schranke für d in Abhängigkeit von (a,b,c) ist in folgender Tabelle mit A bezeichnet.

a	b	c	A
1	1	1	31
1	1	2	62
1	1	3	42
1	1	4	19
1	1	5	27
1	1	6	30
1	1	7	21
1	1	8	14
1	1	9	15
1	1	10	22
1	1	11	22
1	1	12	15
1	2	2	31
1	2	3	58
1	2	4	62
1	2	5	60
1	2	6	29
1	2	7	35
1	2	8	21
1	2	9	29
1	2	10	23
1	2	11	26
1	2	12	35
1	2	13	23
1	2	14	21
1	3	3	14
1	3	4	15
1	3	5	22
1	3	6	14
1	3	7	17
1	3	8	14
1	3	9	11
1	3	10	15
1	4	4	10
1	4	5	12
1	4	6	21
1	4	7	14
1	4	8	10
1	4	9	11
1	4	10	12
1	5	5	12
1	5	6	17
1	5	7	17
1	5	8	11
1	5	9	11
1	5	10	12
1	6	6	11
1	6	7	18
1	6	8	13
1	6	9	11
1	6	10	12
1	6	11	13
1	7	7	10
1	7	8	10
1	7	9	12
1	7	10	12
2	2	2	9
2	2	3	17
2	2	4	9
2	2	5	12
2	2	6	9
2	2	7	12
2	3	3	10
2	3	4	23
2	3	5	15
2	3	6	13
2	3	7	16
2	3	8	9
2	3	9	10
2	4	4	9
2	4	5	15
2	4	6	9
2	4	7	14
2	4	8	9
2	4	9	10
2	5	5	9
2	5	6	10
2	5	7	10
2	5	8	9
2	5	9	10
2	6	6	7
2	6	7	10
3	3	3	7
3	3	4	9
3	3	5	9
3	3	6	7
3	3	7	8
3	4	4	9
3	4	5	11
3	4	6	11
3	4	7	8
3	4	8	9
3	5	5	7
3	5	6	10
3	5	7	9
3	6	6	7
3	6	7	8
4	4	4	6
4	4	5	7
4	4	6	7
4	5	5	7
4	5	6	8
4	5	7	8
4	6	6	7
4	6	7	8
5	5	5	6
5	5	6	7
5	6	6	7
5	6	7	8

§ 39. Ermittlung der oberen und unteren Schranke für die Determinanten von F.

39.1 Unter den nach 38.1 möglichen Formen befinden sich 40, deren Determinante grösser als 744 ist. Von jeder dieser Formen lassen sich aber fünf Ausnahmewerte angeben. Diese sind in folgender Tabelle zusammengestellt.

a	b	c	d	Ausnahmewerte				
1	2	12	32	5	7	10	26	42
			33	5	7	10	26	40
			34	5	7	10	26	74
			35	5	7	10	26	40
1	6	7	18	2	3	5	12	20
1	6	11	12	2	3	5	8	14
			13	2	3	5	8	32
1	7	9	12	2	3	5	6	14
1	7	10	11	2	3	5	6	13
			12	2	3	5	6	15
2	4	7	14	1	3	5	10	17
2	5	9	9	1	3	4	6	10
			10	1	3	4	6	25
2	6	7	9	1	3	4	5	10
			10	1	3	4	5	11
3	4	6	11	1	2	5	8	26
3	4	8	8	1	2	5	6	9
			9	1	2	5	6	10
3	5	6	9	1	2	4	7	10
			10	1	2	4	7	25

a	b	c	d	Ausnahmewerte				
3	5	7	8	1	2	4	6	9
			9	1	2	4	6	11
3	6	6	7	1	2	4	5	8
3	6	7	7	1	2	4	5	8
			8	1	2	4	5	22
4	5	6	7	1	2	3	8	14
			8	1	2	3	7	25
4	5	7	7	1	2	3	6	8
			8	1	2	3	6	10
4	6	6	6	1	2	3	5	7
			7	1	2	3	5	8
4	6	7	7	1	2	3	5	8
			8	1	2	3	5	9
5	5	5	6	1	2	3	4	7
5	5	6	6	1	2	3	4	7
			7	1	2	3	4	8
5	6	6	6	1	2	3	4	7
			7	1	2	3	4	8
5	6	7	7	1	2	3	4	8
			8	1	2	3	4	9

Damit kommen für Formen mit genau vier Ausnahmewerten nur solche in Betracht, deren Determinante kleiner oder gleich 744 ist.

39.2 Die Form (1,2,12,31) stellt jede Zahl $\neq 5,7,10,26$ dar.

Beweis. Nach 6.2 stellt die ternäre Teilform f = (1,2,12) jede Zahl $2n \notin N = \{4^k(16q+10)\}$ dar.

a) Darstellung gerader Zahlen $\in N$: Mit $t = 2^k$ wird $4^k(16q+10) - 31.4^k = 4^k(16(q-2)+11)$ für $k > 0$ und $q \geq 2$ von f angenommen. Für die Zahlen $16q+10$ wird mit $t = 2$ die Zahl $16q+10 - 31.2^2 = 16(q-8)+14$ von f für $q \geq 8$

dargestellt. Ist $k > 1$, $q = 0,1$, so wird mit $t = 2^{k-1}$ die Zahl $4^k(16q+10) - 31.4^{k-1} = 4^{k-1}(16(4q)+9)$ von f angenommen. Zu untersuchen sind somit noch die Zahlen $16q+10$ für $0 \leq q \leq 7$ sowie die Werte 40,104. Hier gilt: $40 = 3^2+31.1^2$, $42 = 3^2+2.1^2+31.1^2$, $58 = 3^2+2.3^2+31.1^2$, $74 = 5^2+2.3^2+31.1^2$, $90 = 3^2+2.5^2+31.1^2$, $104 = 5^2+12.2^2+31.1^2$, $106 = 5^2+2.5^2+31.1^2$, $122 = 5^2+2.3^2+12.2^2+31.1^2$. Die Werte 10 und 26 werden von (1,2,12,31) ausgelassen.

b) Darstellung ungerader Zahlen m: Ist $m \geq 279$ und $m \neq 256q+191$, so ist nach 13.1 eine der Zahlen $m-31$, $m - 31.3^2$ durch f darstellbar. Für die Werte $m = 256q+191$ wähle man $t = 5$, dann wird $m - 31.5^2 = 256q+191-775 = 256(q-3)+184 = 4(16(4q-10)+14)$ für $q \geq 3$ von f angenommen. Es fehlen noch Darstellungen der ungeraden Zahlen

1) $m < 31$

2) $m = 31 + 4^k(16q+10) < 279$

3) $m = 256q+191$ mit $q = 0,1,2$.

Nach 6.2 wird jede ungerade Zahl $3n$ durch (1,2,12) angenommen, so dass im folgenden bei 1), 2) und 3) nur Werte $3n+1$, $3n+2$ zu berücksichtigen sind.

1) $1 = 1^2$, $11 = 3^2+2.1^2$, $13 = 1^2+12.1^2$, $17 = 3^2+2.2^2$, $19 = 1^2+2.3^2$, $23 = 3^2+2.1^2+12.1^2$, $25 = 5^2$, $29 = 3^2+2.2^2+12.1^2$, die Werte 5 und 7 werden von (1,2,12,31) ausgelassen.

2) $41 = 3^2+2.4^2$, $71 = 3^2+2.5^2+12.1^2$, $73 = 1^2+2.6^2$, $89 = 9^2+2.2^2$, $121 = 11^2$, $137 = 3^2+2.8^2$, $169 = 13^2$, $185 = 7^2+12.1^2+31.2^2$, $191 = 7^2+2.3^2+31.2^2$, $199 = 5^2+2.5^2+31.2^2$, $217 = 9^2+12.1^2+31.2^2$, $233 = 1^2+12.3^2+31.2^2$, $263 = 11^2+2.3^2+31.2^2$, $265 = 1^2+2.4^2+12.3^2+31.2^2$.

3) $703 = 23^2+2.5^2+31.2^2$.

Damit stellt (1,2,12,31) jede Zahl $\neq 5,7,10,26$ dar.

39.3 Da die Form (1,2,12,31) die Determinante 744 besitzt und genau vier Werte auslässt, so folgt mit Hilfe von 39.1: Die Determinante jeder

Form mit genau vier Ausnahmewerten ist kleiner oder gleich 744. Die obere Schranke 744 wird von (1,2,12,31) erreicht.

39.4 Die Form (1,1,1,21) stellt jede Zahl $\neq 7,15,28,60$ dar.

Beweis. Die Form $f = (1,1,1)$ stellt jede Zahl $\notin \{4^k(8q+7)\}$ dar. Mit $t = 2^k$ wird $4^k(8q+7) - 21.4^k = 4^k(8(q-2)+2)$ für $q \geq 2$ von f angenommen; für die Zahlen $4^k(8q+7)$ mit $k \geq 2$ und $q = 0,1$ wähle man $t = 2^{k-2}$, dann ist $4^k(8q+7) - 21.4^{k-2} = 4^{k-2}(8(16q+11)+3)$ durch f darstellbar. Mit $k = 0,1$ und $q = 0,1$ erhält man die vier Werte 7,15,28,60, die von (1,1,1,21) ausgelassen werden.

39.5 Nach 21.3 ist die Determinante jeder Form mit vier Ausnahmewerten grösser oder gleich acht. Eine Determinante kleiner als 21 besitzen nur die Formen (1,1,1,8), (1,1,1,16), (1,1,4,4) und (2,2,2,2). Da aber $(1,1,1,8) \neq 7,15,23,31,39$; $(1,1,1,16) \neq 7,15,23,31,39$; $(1,1,4,4) \neq 3,7,11,15,19$ und $(2,2,2,2) \neq 1,3,5,7,9$ gilt, so ist die Determinante jeder Form mit genau vier Ausnahmewerten grösser oder gleich 21. Nach 39.4 wird diese untere Schranke auch angenommen.

§ 40. Zusammenstellung.

Die Ergebnisse über die Anzahl und die Determinante fastuniverseller Formen F mit M Ausnahmewerten werden im folgenden zusammengestellt. Dabei bezeichnet S die obere und U die untere Schranke für die Determinante von F

M	Anzahl A	S	S wird angenommen durch	U	U wird angenommen durch
0	54	112	(1,2,4,14)	1	(1,1,1,1)
1	86	240	(1,2,4,30)	9	(,1,1,9)
2	$126 \leq A \leq 127$	368	(1,2,4,46)	11	(1,1,1,11)
3	$93 \leq A \leq 98$	576	(1,2,12,24)	19	(1,1,1,19)
4	unbekannt	744	(1,2,12,31)	21	(1,1,1,21)

Die Ergebnisse für M = 0 stammen von Ramanujan (37) und Dickson (4);

für M = 1 wurden sie von Halmos (18) und Pall (33) erzielt. Für M = 2,3,4 vergleiche man §§ 20,37,39 [5].

Anmerkungen.

1) Die Zahlen in Klammern hinter den Namen der Verfasser beziehen sich auf das Literaturverzeichnis am Ende der Arbeit.

Es wird zitiert aus der Diophant- Ausgabe von G.Wertheim (7I) : " Die Arithmetik und die Schrift über Polygonalzahlen des Diophantus von Alexandria. Übersetzt und mit Anmerkungen versehen von G.Wertheim," Leipzig 1890. In diese Ausgabe sind auch die Randbemerkungen aufgenommen, die P.Fermat in seine Diophant- Ausgabe von Bachet de Méziriac (7II) aus dem Jahr 1621 eintrug und die dann in der Diophant- Ausgabe seines Sohnes S.Fermat aus dem Jahre 1670 abgedruckt wurden.

2) Beweise für die Sätze in 3.6 - 3.8 finden sich u.a. bei P.Bachmann (1).

3) Man sagt: f stellt die Zahl n dar, wenn es ein Tripel ganzer Zahlen x,y,z gibt, so dass $n = f(x,y,z)$ ist.

4) zu (1,3,5,7) vgl. § 19.

5) Nach A.E.Ross (41) gilt auch für universelle klassische Formen $F = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j$ ($a_{ij} = a_{ji}$ ganz) die Abschätzung $S \leq 112$. Ich konnte zeigen, dass für klassische Formen mit einem Ausnahmewert $S \leq 240$ gilt. (Die Form (1,2,4,30) der Determinante 240 lässt nur den Wert 14 aus). Für klassische Formen mit zwei Ausnahmewerten ist mir bisher nur $S \leq 610$ bekannt.

Literaturverzeichnis.

1 P.Bachmann, Die Arithmetik der quadratischen Formen I, Leipzig (1898)

2 E.Borissow, Über die Reduction der positiven ternären quadratischen Formen nach der Selling'schen Methode, nebst einer Tabelle der reduzierten Formen für alle Determinanten von 1 bis 200, St. Petersburg (1890),1 - 116.

3 A.Cauchy, Démonstration du théorème général de Fermat sur les nombres polygones, Journal de l'école polytechnique, 9, 104 - 116 (1813); Oeuvres (2),6 , 320 - 353.

4 L.E.Dickson, Ternary quadratic forms, Bulletin of the American Math. Society,33 ,63 - 70 (1927).

5 L.E.Dickson, Quaternary quadratic forms representing all integers, American Journal of Mathematics,49, 39 - 56 (1927).

6 L.E.Dickson, History of the theory of numbers, New York (1952), II, Kap. VIII, 275 - 303; III, Kap. X, 225 - 233.

7I G.Wertheim, Die Arithmetik und die Schrift über Polygonalzahlen des Diophantus von Alexandria. Übersetzt und mit Anmerkungen begleitet von G.Wertheim, Leipzig (1890)
a) Buch IV, Aufgabe 31 bzw. Aufgabe 32, 161 - 164
b) Buch V, Aufgabe 17, 221 - 222.

7II C.G.Bachet, Diophanti Alexandrini Arith., Paris (1621), 241 - 242.

8 P.G.L.Dirichlet, a) Über die Reduction der positiven quadratischen Formen mit drei unbestimmten ganzen Zahlen, Journal für die reine und angewandte Mathematik, 40, 209 - 227 (1850); Werke II, 27 - 48.

b) Über die Zerlegbarkeit der Zahlen in drei Quadrate, Journal für die reine und angewandte Mathematik,40 , 228 - 232 (1850); Werke II, 89 - 96.

9 P.G.L.Dirichlet, Sur l'équation $t^2+u^2+v^2+w^2 = 4m$, Journal de Mathématiques (2),1 ,210 - 214 (1856); Werke II, 201 - 208.

10 G.Eisenstein, Tabelle der reducierten positiven ternären quadratischen Formen nebst den Resultaten neuer Forschungen über diese Formen, in besonderer Rücksicht auf ihre tabellarische Berechnung, Journal für die reine und angewandte Mathematik,41, 141 - 190 (1851).

11 G.Eisenstein, Anhang zur Tabelle der reducierten positiven ternären quadratischen Formen, Journal für die reine und angewandte Mathematik,41 ,227 - 242 (1851).

12 L.Euler, a) Brief vom 4. Mai 1748 an Chr.Goldbach, Novi comment. acad. sc. Petrop. 5, 54 (1754,55/1760); Werke 1,II,369

b) Demonstratio theorematis Fermatiani omnem numerum sive integrum sive fractum esse summam quatuor pauciorumve quadratorum, Novi commentarii academiae scientiarum Petropolitanae 5,13 - 58 (1754,55/1760); Werke 1,II, 338 - 372.

13 L.Euler, Novae demonstrationes circa resolutionem numerorum in quadrata, Nova acta eruditorum 1773,193 - 211; Acta academiae scientiarum Petropolitanae 1777,II,48 - 69 (1780); Werke 1,III,218 - 239.

14 P.Fermat, Oeuvres I,305; vgl. (7I),162.

15 R.Fricke / F.Klein, Elliptische Modulfunktionen II,400 (1892).

16 C.F.Gauss, a) Disquisitiones arithmeticae (1801), Artikel 291, 292

b) Disquisitiones arithmeticae (1801), Artikel 293

17 L.Gegenbauer, Anzahl der Darstellungen einer ganzen Zahl durch gewisse Formen, Sitzungsberichte der Akademie der Wissenschaften, Wien (Math.) 103,IIa,122 - 125 (1894).

18 P.R.Halmos, Almost universal forms, Bulletin of the American Math. Society 44,141 - 144 (1938).

19 C.G.Jacobi, Elementarer Beweis einer merkwürdigen analytischen Formel nebst einigen aus ihr folgenden Zahlensätzen, Journal für die reine und angewandte Mathematik 21, 13 - 32 (1840); Werke VI, 281 - 302.

20 B.W.Jones, A table of Eisenstein reduced positive ternary quadratic forms of determinant ≤ 200, Bulletin No 97 of the National Research Council (1935).

21 B.W.Jones, A new definition of genus for ternary quadratic forms, Transactions of the American Math. Society 33,92 - 110 (193

22 B.W.Jones, The regularity of a genus of positive ternary quadratic forms, Transactions of the American Math. Society 33, 111 - 124 (1931).

23 B.W.Jones, The arithmetic theory of quadratic forms, New York (1950).

24 B.W.Jones / G.Pall, Regular and semi- regular positive ternary quadratic forms, Acta mathematica 70, 165 - 191 (1939).

25 E.Kamke, Verallgemeinerungen des Waring - Hilbertschen Satzes, Mathematische Annalen 83, 85 - 112 (1921).

26 H.D.Kloosterman, On the representation of numbers in the form $ax^2+by^2+cz^2+dt^2$, Acta mathematica 49, 407 - 464 (1926).

27 H.D.Kloosterman, On the representation of numbers in the form $ax^2+by^2+cz^2+dt^2$, Proceedings of the London Math. Society 25,143 - 173 (1926).

28 J.L.Lagrange, Démonstration d'un théorème d'arithmetique, Nouveaux Mémoires de l'Académie royale des sciences et Belles - Lettres de Berlin 1770,123 - 133 (1772); Oeuvres 3, 189 - 201.

29 E.Landau, Vorlesungen über Zahlentheorie I, Leipzig (1927).

30 J.Liouville, Sur les deux formes $x^2+y^2+z^2+t^2$ et $x^2+2y^2+3z^2+6t^2$, Journal de Math. 10,169 - 170 (1845).
Weitere Arbeiten: Journal de Math. (2),1,230 (1856),
Journal de Math. (2),4,47 - 48 (1859),
Journal de Math. (2),5,147 - 152,269 - 272,305 - 308 (1860)
Journal de Math. (2),6,135 - 136,225 - 230,324 - 328, 409 - 416 (1861).

31 L.J.Mordell, a) Note on class relation formula, Messenger of Math. 45,76 - 80 (1915)
b) On the solutions of $x^2+y^2+z^2+t^2 = 4m_1m_2$, Messenger of Mathematics 47,142 - 144 (1918).

32 D.C.Morrow, Determination of all quaternary quadratic forms which represent every positive integer
a) University of Chicago , Thesis (1928)
b) Bulletin of the American Mathematical Society 54, 903 (1948).

33 G.Pall, Note on an almost universal form, Bulletin of the American Math. Society 46,291 (1940).

34 G.Pall, A completion of a problem of Kloosterman, American Journal of Mathematics 68,46 - 58 (1946).

35 G.Pall / A.E.Ross, An extension of a problem of Kloosterman, American Journal of Mathematics 68,59 - 65 (1946).

36 Th.Pepin, a) Etudes sur quelques formules d'analyse utiles dans la théorie des nombres, Atti della Academia Pontificia dei Nuovi Lincei 38,139 - 196 (1884/85)

b) Sur quelques formes quadratiques quaternaires, Journal de Math. (4),6,5 - 67 (1890).

37 S.Ramanujan, On the expression of a number in the form $ax^2+by^2+cz^2+dt^2$, Proceedings of the Cambridge Philosophical Society 19,11 - 21 (1916); Collected papers of Srinivasa Ramanujan 169 - 178.

38 A.E.Ross, Universal forms, Proceedings of the National Academy of Sciences 18,600 - 608 (1932).

39 A.E.Ross, On the representation of integers by indefinite ternary quadratic forms of quadratfrei determinant, American Journal of Mathematics 55,293 - 302 (1933).

40 A.E.Ross, A theorem on simultaneous representation of primes and its corollaries, Bulletin of the American Math. Society 45, 899 - 906 (1939).

41 A.E.Ross, A problem of Ramanujan, American Journal of Mathematics 68, 29 - 46 (1946).

42 L.A.Seeber, Untersuchungen über die Eigenschaften der positiven ternären quadratischen Formen, Werke: Mathematische Abhandlungen 1, Mannheim (1831), 49.

43 H.J.Smith, a) On the orders and genera of ternary quadratic forms, Philosophical Transactions 157,255 - 298 (1867); Werke I,455 - 509

b) De fractionibus quibusdam continuis, Collectanea Mathematica (in Memoriam Dominici Chelini), Milan (1881), 117 - 143; Werke II, 287 - 311.

44 W.Tartakowsky, Die Gesamtheit der Zahlen, die durch eine positive quadratische Form $F(x_1,x_2,\ldots,x_s)$ $(s \geq 4)$ darstellbar sind, Bulletin de l'Académie des Sciences de l'URSS, (7),2,111 - 122, 165 - 196 (1929).

45 E.Waring, Meditationes algebraicae, Cambridge ed.3, 349 (1782)

46 M.F.Willerding, Determination of all classes of positive quaternary quadratic forms which represent all positive integers.
a) Dissertation St. Louis University (1947)
b) Bulletin of the American Math. Society 54, 334 - 336 (1948).

Lebenslauf.

Am 28. Juni 1934 wurde ich, Adolf Wolf, in Reutlingen als Sohn des Bäckermeisters Adolf Wolf und seiner Ehefrau Karoline, geb. Zotzel, geboren. Zusammen mit meinem Bruder verbrachte ich meine Kindheit bei unseren Eltern in Pfullingen. 1940 trat ich in die Volksschule Pfullingen ein und wechselte dann 1944 in die Johannes Kepler - Oberschule in Reutlingen über, die ich im Februar 1953 nach bestandener Reifeprüfung verliess.

Vom Sommersemester 1953 ab studierte ich Mathematik und Physik an der Universität Tübingen. Dabei besuchte ich Vorlesungen und Übungen der Herren Professoren Braunbek, Kamke, Kneser, Kossel, Möllenstedt, M.Müller, Pickert, Wielandt und Zeller. Im Frühjahr 1959 legte ich die Wissenschaftliche Prüfung für das Lehramt an Gymnasien ab. Seit August 1960 bin ich als Assistent am Mathematischen Institut der Universität Tübingen beschäftigt, an dem ich seit November 1957 als Hilfsassistent gearbeitet habe.

Druck: K. Urlaub 86 Bamberg Adam-Senger-Str. 28